EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….089**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate *Oxy*, se consideră punctele $A_n(n,0)$ și $B_n(0,n)$, unde $n \in \{1,2,3,4\}$ și se notează cu *M* mulțimea formată din toate aceste 8 puncte.

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele A_2 și B_2.

(4p) **b)** Să se arate că punctele A_1 și B_3 sunt pe dreapta $3x + y - 3 = 0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația paralelei prin B_1 la dreapta A_1B_3.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului $A_1A_4B_4$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\sin\left(A_1\widehat{A_2}B_2\right)$.

(2p) **f)** Să se determine câte drepte trec prin cel puțin două puncte din mulțimea M.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $a + b$ știind că numerele $3, a, 4, b, 5$ sunt, în această ordine, în progresie aritmetică.

(3p) **b)** Să se determine numărul natural c pentru care $\dfrac{(c+5)!}{(c+4)!} = 8$.

(3p) **c)** Să se determine numărul soluțiilor din $\mathbf{Z}_5$ ale ecuației $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{4}$.

(3p) **d)** Să se calculeze numărul funcțiilor $f : \{3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5\}$ pentru care $f(3)$ este număr impar.

(3p) **e)** Să se determine în câte moduri se poate alcătui o echipă de cercetare formată din 2 biologi și 3 chimiști, dacă avem la dispoziție 3 biologi și 4 chimiști.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(3p) **b)** Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

(3p) **d)** Să se compare numerele $a = f(\sqrt{3})$ și $b = f(\sqrt{5})$

(3p) **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ precum şi submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbf{C} \right\}$, unde prin $\overline{z}$ am notat conjugatul numărului complex z.

(4p) **a)** Să se verifice că $I_2 \in G$ şi $O_2 \in G$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $z, w \in \mathbf{C}$ şi $|z|^2 + |w|^2 = 0$, atunci $z = w = 0$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $P, Q \in G$, atunci $P \cdot Q \in G$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $D \in G$, $D \neq O_2$, atunci D este matrice inversabilă şi $D^{-1} \in G$.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $X \in G$, cu proprietatea că $X \cdot C \neq C \cdot X$, unde $C = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A, B \in G$ şi $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

(2p) **g)** Să se arate că mulțimea G, împreună cu operațiile de adunare şi de înmulțire a matricelor, determină o structură de corp necomutativ.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general

$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, respectiv $b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $a_2 - b_2$.

(4p) **b)** Să se arate că $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se studieze monotonia şirului $(b_n)_{n\geq 1}$.

(2p) **d)** Să se arate că $1 - x + x^2 - \ldots + x^{2n-2} - x^{2n-1} = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \geq 0$.

(2p) **e)** Să se arate că $a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty$.