EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….095**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție al dreptei $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-1}$ cu planul $z=0$.

(4p) **b)** Să se determine valoarea numărului $sin^2\,2007+cos^2\,2007$.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsa $9x^2+4y^2-25=0$ şi dreapta $x=0$.

(4p) **d)** Să se determine modulul vectorului $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

(2p) **e)** Să se determine modulul numărului complex $1+i$.

(2p) **f)** Să se determine aria unui triunghi care are lungimea unei laturi 10 şi lungimea înălțimii corespunzătoare ei 6.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine restul împărțirii polinomului X^3-1 la polinomul X^2+X+1.

(3p) **b)** Să se calculeze numărul $\log_5 2\cdot\log_2 5$.

(3p) **c)** Să se determine soluția reală a ecuației $5^x=7^x$.

(3p) **d)** Să se determine partea întreagă a numărului π.

(3p) **e)** Să se determine probabilitatea ca un element $n\in\{9,10,11,12,13\}$ să verifice relația $\lg n<1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\cos 2x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)-1}{x-\pi}$.

(3p) **c)** Să se arate că $f(x+\pi)=f(x),\ \forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$.

(3p) **e)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos 2n}{n}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\to\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, $f(x)=1+\frac{1}{x}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ şi şirurile $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ date prin relațiile de recurență: $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $n\in\mathbf{N}^*$, $F_0=0$, $F_1=1$, $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbf{N}$, $a_0\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Notăm $f_n=\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{n \text{ ori}}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

(4p) **b)** Să se arate că $F_n\neq 10$, pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

(4p) **c)** Să se determine $n\in\mathbf{N}$, astfel ca $F_n=21$.

(2p) **d)** Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se demonstreze că
$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

(2p) **e)** Să se arate că $a_n=f_n(a_0)$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $f_n(x)=\frac{F_{n+1}\cdot x+F_n}{F_n\cdot x+F_{n-1}}$, $\forall\, x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru $n\in\mathbf{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\frac{\mathrm{tg}^n x}{\mathrm{tg}^n x+\mathrm{ctg}^n x}$, $g_n:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $g_n(x)=\frac{\mathrm{ctg}^n x}{\mathrm{tg}^n x+\mathrm{ctg}^n x}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(4p) **a)** Să se arate că $f_n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=g_n(x)$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(4p) **b)** Să se determine $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f_n(x)$ şi $\lim\limits_{x\to 0}g_n(x)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}f_1(x)\,dx$.

(2p) **d)** Să se arate că funcțiile f_n sunt crescătoare iar funcțiile g_n sunt descrescătoare, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $\int_{\frac{\pi}{4}-a}^{\frac{\pi}{4}+a}f_n(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}-a}^{\frac{\pi}{4}+a}g_n(x)dx=a$, pentru orice $a\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$, unde $0<a<b<\frac{\pi}{4}$.

(2p) **g)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{3}}f_n(x)dx$.