EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….099**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $1+7i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(-1,-2,-3)$ la planul $x+y+z-4=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2+y^2=13$ dusă prin punctul $P(2,3)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(-1,2)$, $M(-2,3)$ şi $N(-3,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,1,1)$ şi $D(-1,-2,-3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\cos\pi + i\sin\pi)^{16} = a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 1 şi rația este 2, să se calculeze termenul al patrulea.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $n+9<3^n$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(2)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+7)=3$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f=X^3-X-24$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Z_3})$ se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și mulțimea $N = \left\{X \in M_2(\mathbf{Z_3}) \mid X^2 = O_2\right\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $O_2 \in N$ și $A \in N$.

(4p) **b)** Să se verifice că $I_2 \notin N$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $B \in N$, $B = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$, atunci $\hat{a} + \hat{d} = \hat{0}$ și $\hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c} = \hat{0}$.

(2p) **d)** Să se găsească o matrice $C \in M_2(\mathbf{Z_3})$ cu proprietățile $\det(C) = \hat{0}$ și $C \notin N$.

(2p) **e)** Să se determine numărul elementelor mulțimii $M_2(\mathbf{Z_3})$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $P, Q \in N$ și $P \cdot Q = Q \cdot P$, atunci $P \cdot Q = O_2$.

(2p) **g)** Să se arate că matricea I_2 **nu** se scrie ca o sumă finită de elemente din mulțimea N.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = arctg\ x$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$a_n = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(2p) **c)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\forall k \in [0,\infty)$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{c^2+1}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\dfrac{1}{(k+1)^2+1} < f(k+1) - f(k) < \dfrac{1}{k^2+1}$, $\forall k \in [0, \infty)$.

(4p) **e)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător .

(2p) **f)** Să se arate că $f(n+1) - f(1) < a_n < f(n) - f(0)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent și are limita un număr real din intervalul $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.