EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….100

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(1,a)$, cu $a \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se determine lungimea segmentului *(OA)*.

(4p) **b)** Să se determine ecuația mediatoarei segmentului *(OA)*.

(4p) **c)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care $OA = OB$.

(4p) **d)** Să se determine ecuația cercului de centru O şi rază OA.

(2p) **e)** Să se calculeze produsul de numere complexe $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot i^7$.

(2p) **f)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{1+i}{1-i}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine probabilitatea ca alegând $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$ să avem $2^n \le n^2$.

(3p) **b)** Să se determine trei numere în progresie aritmetică crescătoare, ştiind că suma lor este 9, iar produsul lor este 15.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația $\log_x 4 = 2$, pentru $x > 1$.

(3p) **d)** Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+2} = x$, pentru $x \ge 0$.

(3p) **e)** Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = arctg\ x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se demonstreze că f este strict monotonă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se determine asimptotele orizontale ale graficului funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-3\\0&1&-2\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A^2=B^2=I_3$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **c)** Să se arate că matricea B este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.

(2p) **d)** Să se verifice că $AB\neq BA$.

(2p) **e)** Să se arate că $(B\cdot A)^n\neq I_3$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că ecuația $X^2=I_3$ are cel puțin 2007 soluții în mulțimea $M_3(\mathbf{Z})$.

(2p) **g)** Să se dea un exemplu de structură de grup în care există două elemente de ordin finit, al căror produs nu are ordin finit.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^x+6^x-3^x-4^x$,

$g(x)=a^x+6^x-3^x-4^x$, $h(x)=b^x$, unde $a,b\in(1,\infty)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $g'(x)$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $g'(0)$ şi $g(0)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x)\geq 0$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Utilizând teorema lui *Fermat*, să se determine $a\in(1,\infty)$, astfel încât $g(x)\geq 0$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $h^{(n)}(x)=b^x(\ln b)^n$, $\forall x\in\mathbf{R}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, unde prin $h^{(n)}(x)$ am notat derivata de ordinul n a funcției h.

(2p) **f)** Să se arate că, dacă $p,q,r,s\in\mathbf{R}$, $0<p<q<r<s$ şi $p+s=r+q$, atunci

$p^n+s^n>r^n+q^n$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$.

(2p) **g)** Să se arate că, $f^{(n)}(0)>0$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$.