EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta* ….001**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$, $C(5,1)$.

(4p) **a)** Să se calculeze numărul complex $2z-2z^2$, dacă $z=2-3i$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului $[BC]$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria triunghiului ABC.

(4p) **d)** Să se calculeze distanța de la punctul A la dreapta BC.

(2p) **e)** Să se determine $m,n\in\mathbf{R}$ astfel încât $x+my+n=0$ să reprezinte ecuația dreptei AC.

(2p) **f)** Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x=27^{x+1}$.

(3p) **b)** Se consideră progresia aritmetică $3,9,15,21,\ldots$. Să se determine termenul de rang 33 al progresiei.

(3p) **c)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} C_4^2 & C_5^1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

(3p) **d)** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2x-2007$. Să se calculeze $(f\circ f)(2007)$.

(3p) **e)** Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție definită prin $x\circ y=xy-2x+3y-5$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$. Să se rezolve ecuația $2\circ x=6$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(-1,\infty)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei spre ∞ la graficul funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nf(n)}{n^2+2007}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea M formată din toate matricele cu 2 linii şi 2 coloane cu proprietatea că elementele fiecărei matrice din mulțimea M formează mulțimea $\{1,2,3,4\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $C \in M$, atunci $\det(C) \neq 0$.

(2p) **d)** Să se calculeze rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $X \in M$, atunci $-10 \leq \det(X) \leq 10$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $B \in M$, atunci $B^{-1} \notin M$.

(2p) **g)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *M*.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln \dfrac{x}{x+1}$ şi $g(x) = f'(x)$.

(4p) **a)** Să se determine $g(x)$, $x > 0$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția g este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că $g(x) > 0$, $\forall x > 0$.

(2p) **d)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$ există $c_n \in (n, n+1)$ astfel încât $g(c_n) = f(n+1) - f(n)$.

(2p) **e)** Să se arate că $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n), \forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$$

2p) **g)** Folosind eventual punctele **e)** şi **f)**, să se arate că $\dfrac{n}{2(n+2)} < \ln \dfrac{2n+2}{n+2}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.