EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta …**.004**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3;3)$, $B(-1;1)$, $C(2;5)$.

(4p) **a)** Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$.

(4p) **b)** Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[BC]$.

(4p) **d)** Să se calculeze $\sin\left(A\hat{B}C\right)$.

(2p) **e)** Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2 = 3x$ în punctul $A(3,3)$.

(2p) **f)** Să se determine ecuația cercului de diametru $[BC]$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine câte numere întregi aparțin intervalului $\left[-\sqrt{10};\sqrt{15}\right]$.

(3p) **b)** Să se determine numărul natural *n* dacă $2^{2n-1} = 32$.

(3p) **c)** Să se determine numărul real pozitiv *a* dacă $\log_4 9 = \log_2 a$.

(3p) **d)** Să se determine numărul real x dacă numerele $x+1$; $2x-3$ şi $x+5$ (în această ordine) sunt în progresie aritmetică .

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de funcție neconstantă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ pentru care $f(-2)=f(2)$.

2.

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\left(1+x^2\right)e^x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției *f*.

(3p) **c)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.

(3p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției *f*.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 e^{-x} f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $H = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid A - I_2 \text{ este inversabilă}\}$ şi legea de compoziție ”*” definită pe mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ astfel $A * B = AB - A - B + 2I_2$, $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se arate că $A * B = (A - I_2)(B - I_2) + I_2$, $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$.

(4p) **b)** Să se arate că matricea $2I_2$ este element neutru pentru legea de compoziție ”*” pe $M_2(\mathbf{R})$.

(4p) **c)** Să se arate că legea de compoziție ”*” este asociativă pe mulțimea $M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **d)** Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu legea ”*”.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $(H,*)$ este grup.

(2p) **f)** Să se arate că funcția $f : H \to M_2(\mathbf{R})$, $f(X) = X - I_2$ are proprietatea $f(X * Y) = f(X) \cdot f(Y)$, $\forall X, Y \in H$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că grupul $(H,*)$ este izomorf cu grupul multiplicativ al matricelor pătratice inversabile de ordinul doi.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : [0;1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$ şi $g(x) = \ln(1 + x^2)$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $0 \le f(x) \le 1$ şi $0 \le g(x) \le 1$, $\forall x \in [0;1]$.

(4p) **b)** Să se determine $f'(x)$ şi $g'(x)$, $\forall x \in [0;1]$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că funcția $f - g$ este convexă pe $[0;1]$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(x) \ge g(x)$, $\forall x \in [0;1]$.

(2p) **e)** Să se arate că $\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)}$, $\forall x \in [0;1]$.

(2p) **f)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi - 2}{4}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\int_0^1 g(x)dx = \ln 2 + \frac{\pi - 4}{2}$.