

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta005

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

 În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,1)$, $C(0,-2)$ și dreapta d de ecuație $y = x - a$, $a \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) c) Să se calculeze lungimea segmentului $[BC]$.
- (4p) d) Să se determine numărul real a dacă punctul A aparține dreptei d .
- (2p) e) Să se calculeze $\sin(\hat{A}BC)$.
- (2p) f) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se determine câte submulțimi cu cel mult două elemente are mulțimea $\{5,7,9\}$.
- (3p) b) Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 6$.
- (3p) c) Să se determine valoarea maximă a funcției $f : [1;3] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -2x + 5$.
- (3p) d) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ dacă numărul i este soluție a ecuației $x^2 + ax + 1 = 0$.
- (3p) e) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ dacă matricea $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}$ are rangul 1.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$.

- (3p) a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al graficului funcției f cu axa Oy .
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \ln x]$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{C} \right\}$ și funcția $f : \mathbf{C} \rightarrow M$, $f(x) = \frac{1}{2} A(x)$.

- (4p) a) Să se arate că $A(x)A(y) = A(2xy)$, $\forall A(x), A(y) \in M$.
- (4p) b) Să se arate că matricea $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru pentru operația de înmulțire a matricelor pe mulțimea M .
- (2p) c) Să se determine simetricul elementului $A(1) \in M$ în raport cu înmulțirea matricelor pe M .
- (4p) d) Să se arate că $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{C}$.
- (2p) e) Să se arate că $f(x^3) = [f(x)]^3$, $\forall x \in \mathbf{C}$.
- (2p) f) Să se demonstreze că funcția f este injectivă.
- (2p) g) Să se rezolve în mulțimea \mathbf{C} ecuația $[f(x)]^3 = f(1)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $f_1(x) = -4x^3 + 3x$ și $f_n = f_{n-1} \circ f_1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.

- (4p) a) Folosind egalitatea $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, să se arate că $f_1(\sin x) = \sin 3x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f_2(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $f_n(\sin x) = \sin(3^n x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se calculeze $l_k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_k(\sin x)}{x}$, $k \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{3^{n+1}}$, unde l_k ($k \in \mathbf{N}^*$) este limita calculată la subpunctul d).
- (2p) f) Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(\sin x) dx = \frac{1}{3}$.
- (2p) g) Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(\cos x) dx = \frac{1}{3}$.