EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta* ….032**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine conjugatul numărului complex $z = i^{10} - i^{11}$.

(4p) **b)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ dacă $1 + (a \cdot i)^2 = 0$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}$.

(4p) **d)** Să se calculeze $tg15^\circ \cdot ctg15^\circ$.

(2p) **e)** Să se determine $c, d \in \mathbf{R}$ dacă punctele $A(c,1), B(2,d)$ aparțin dreptei de ecuație $2x - y - 3 = 0$.

(2p) **f)** Să se dea un exemplu de punct $M(a,b)$ care aparțin parabolei de ecuație $y^2 = 4x$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se arate că $\left(\log_2 3 - \log_2 6\right) \in \mathbf{Z}$.

(3p) **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix}$.

(3p) **c)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 + 2X^2 - 2X - 1$.

(3p) **d)** Dacă $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2 - 3$ să se calculeze $f\left(g(\sqrt{3})\right)$.

(3p) **e)** Să se determine cel mai mare număr întreg m pentru care $3^m < 30$.

2.

(3p) **a)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ este strict crescător.

(3p) **b)** Să se dea un exemplu de funcții diferite $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care $f'(1) = g'(1)$

(3p) **c)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

(3p) **e)** Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care $\int_2^3 x\,dx \leq n$.

SUBIECTUL III (20p)

Pe mulțimea $\mathbf{C}$ a numerelor complexe se defineşte legea de compoziție "$\circ$" prin $z \circ u = z \cdot u + i \cdot (z+u) - 1 - i$, $\forall z, u \in \mathbf{C}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $(1-i) \circ i$.

(4p) **b)** Să se arate că există $e \in \mathbf{C}$ astfel încât $z \circ e = e \circ z = z$, $\forall z \in \mathbf{C}$.

(4p) **c)** Să se verifice că $z \circ u = (z+i)(u+i) - i$, $\forall z, u \in \mathbf{C}$.

(2p) **d)** Să se determine $z \in \mathbf{C}$ pentru care $z \circ (1-i) = 3 + i$.

(2p) **e)** Să se arate că există $f \in \mathbf{C}$ astfel încât $z \circ f = f \circ z = f$, $\forall z \in \mathbf{C}$.

(2p) **f)** Să se arate că $(z \circ u) \circ w = z \circ (u \circ w)$, $\forall z, u, w \in \mathbf{C}$.

(2p) **g)** Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că

$$\underbrace{z \circ z \circ \ldots \circ z}_{de\ n\ ori} = (z+i)^n - i, \ \forall n \in \mathbf{N}^*, \ \forall z \in \mathbf{C}.$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ şi pentru fiecare $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ se defineşte funcția $f_k : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f_k(x) = \frac{k}{n} \cdot x^n - x^k$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_1'(x)$, $x \in [0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(1)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x)dx$.

(2p) **d)** Să se arate că $x = 1$ este punct de minim local pentru funcția f_k, $\forall\ k \in \{1,\ldots,n-1\}$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{k}{n} \cdot x^n \geq x^k + \frac{k}{n} - 1$, $\forall x \geq 0$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ şi $\forall\ k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(2p) **f)** Să se arate că $\int_0^1 f_k(x)dx \geq \frac{k}{n} - 1$, $\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(2p) **g)** Să se arate că pentru orice $x \geq 0$ şi orice $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ este adevarată inegalitatea

$$x^n + 1 \geq \frac{2}{n+1}\left(x^n + x^{n-1} + \ldots + 1\right).$$