EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* …033**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$, unde $A(3,2,1)$, $B(1,2,3)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

(4p) **c)** Să se determine partea reală a numărului complex $(1+i)^{10}$.

(4p) **d)** Să se determine coordonatele punctului comun al dreptelor $x+y+3=0$ și $3x-y-1=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile $A(-1,0)$, $B(2,1)$, $C(3,-1)$.

(2p) **f)** Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât $A(3\alpha, 4\alpha)$ să aparțină cercului de ecuație $x^2+y^2=25$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine $x\in\mathbf{R}$ astfel încât numerele $100, x, 10$ (în această ordine) să fie în progresie aritmetică.

(3p) **b)** Să se determine probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1,2,...,9\}$ să verifice relația $n!<2007$.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația $2^{2x}-2\cdot 2^x-8=0$.

(3p) **d)** Să se calculeze restul împărțirii polinomului $f=X^3$ la polinomul $g=X+1$.

(3p) **e)** Să se arate că $\log_2(\log_3 9)$ este un număr întreg.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x-x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f(0)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0$, $x=1$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numărul real $\omega = 1 + \sqrt{2}$ şi mulțimea $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$.

Se notează cu $\overline{\omega} = 1 - \sqrt{2}$ şi $G = \{z \in H \mid \exists y \in H$ astfel încât $y \cdot z = 1\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $0 \in H$, $1 \in H$, $\omega \in H$ şi $\overline{\omega} \in H$.

(4p) **b)** Să se verifice că $\omega^2 = 2\omega + 1$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $z, y \in H$, atunci $z + y \in H$ şi $z \cdot y \in H$.

(2p) **d)** Să se arate că $\omega \cdot \left(-\overline{\omega}\right) = 1$.

(2p) **e)** Să se arate că $\omega \in G$.

(2p) **f)** Să se arate că mulțimea G are cel puțin 2007 elemente.

(2p) **g)** Să se arate că $\omega^{2007} \notin \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = e^x$ şi $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\int_1^2 f^2(x)dx$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\int_1^2 g^2(x)dx$.

(2p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției g.

(2p) **e)** Să se arate că $t^2 e^{2x} - 2t\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x^2} \geq 0, \forall\, t \in \mathbf{R}, \forall\, x > 0$.

(2p) **f)** Integrând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că

$$t^2 \int_1^2 e^{2x}dx - 2t\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \geq 0,\ \forall\, t \in \mathbf{R}.$$

(2p) **g)** Să se arate că $\left(\int_1^2 \dfrac{e^x}{x}dx\right)^2 \leq \int_1^2 e^{2x}dx \cdot \int_1^2 \dfrac{1}{x^2}dx$.