Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….042

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctul $A(-1, 3)$ și dreapta $d: y = 3x + 2$.

(4p) **a)** Să se determine ecuația dreptei ce trece prin A și este paralelă cu dreapta *d*.

(4p) **b)** Să se determine distanța de la punctul A la dreapta *d*.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de axa *Oy*.

(4p) **d)** Să se determine coordonatele centrului cercului de ecuație $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

(2p) **e)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât, pentru $z = a + i \in \mathbf{C}$, să avem $|z| = |z-1|$.

(2p) **f)** Să se determine partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\log_2 4 + \log_2 \frac{1}{4}$.

(3p) **b)** Să se determine probabilitatea ca alegând două dintre elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$, suma acestora să fie divizibilă cu 2.

(3p) **c)** Se consideră ecuația $x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$, care are soluțiile complexe x_1, x_2, x_3. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

(3p) **d)** Să se rezolve ecuația $2^{2^x} = 16$.

(3p) **e)** Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{2x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se demonstreze că funcția *f* este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația $f'(x) + x \cdot f(x) = 0$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot f'(x)\, dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru o matrice $M \in M_2(\mathbf{C})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se notează $tr(M) = a + d$.

(4p) **a)** Să se calculeze $tr(A)$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $B, C \in M_2(\mathbf{C})$ și $B = C$, atunci $tr(B) = tr(C)$.

(4p) **c)** Să se găsească două matrice diferite, $P, Q \in M_2(\mathbf{C})$, pentru care $tr(P) = tr(Q)$.

(2p) **d)** Să se calculeze $tr(U \cdot V)$ și $tr(U \cdot W)$, dacă $U, V, W \in M_2(\mathbf{C})$,

$U = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Să se arate că $tr(aD + bE) = a \cdot tr(D) + b \cdot tr(E)$, $\forall a, b \in \mathbf{C}$, $\forall D, E \in M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **f)** Să se arate că $tr(F \cdot G) = tr(G \cdot F)$, $\forall F, G \in M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $L, N \in M_2(\mathbf{C})$ și $tr(L \cdot X) = tr(N \cdot X)$, $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$, atunci $L = N$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\ln(x+1) - \ln x\right)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $f''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2}$, $\forall x > 0$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_1^e f'(x)\,dx$.

(2p) **f)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

(2p) **g)** Să se arate că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n + 1 + \frac{1}{2}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.