EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta **….057**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = (1-i)^2$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $O(0,0)$ la punctul $A(4,-3)$.

(4p) **c)** Să se arate că punctul $B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ aparține cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 1$.

(4p) **d)** Să se calculeze $tg3 \cdot ctg3$.

(2p) **e)** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 3, 2)$, $B(3, 2, 1)$, $C(2, 1, 3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $P(2,3)$ și $Q(3,2)$ să aparțină dreptei de ecuație $x + ay + b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se verifice identitatea $\hat{x}^3 = \hat{x}$, $\forall \hat{x} \in \mathbf{Z_6}$.

(3p) **b)** Să se arate că $(\hat{x}+\hat{y})^3 = \hat{x}^3 + \hat{y}^3$, $\forall \hat{x},\hat{y} \in \mathbf{Z_6}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x+1$ are inversa $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+7) = \log_2(2x^2+3x+7)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X^2 - 24X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2+4) - \ln(x^2+1)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se arate că $0 < f(x) \le \ln 4$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Q})$ se consideră submulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a^2-2b^2=1, a,b\in\mathbf{Q}\right\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in G$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $A,B\in G$, atunci $AB\in G$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\det(A)$, unde $A\in G$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $X\in G$, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, atunci X este matrice inversabilă şi $X^{-1}=\begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix}\in G$.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $A\in G$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $b\neq 0$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $B\in G$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $a>0$, $b>0$, atunci $B^n\neq I_2$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că mulțimea G conține cel puțin 2007 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(1+x)-x$ şi $g:(-1,\infty)\to\mathbf{R}$, $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{-x}{1+x}$ şi $g'(x)=\frac{x^2}{1+x}$, $\forall x>-1$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(0)$ şi $g'(0)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x)<0<g(x)$, $\forall x>0$.

(2p) **d)** Să se arate că $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice să se arate că

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3},\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+3+5+\ldots+(2n-1))n}{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\frac{1}{3}<\int_0^1\ln(1+x)dx<\frac{1}{2}$.