Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….061**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate *xOy*, se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,2), C(0,4)$ şi $D(-4,0)$.

(4p) **a)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ dacă punctele C şi D aparțin dreptei de ecuație $ax+by+4=0$.

(4p) **b)** Să se determine ecuația paralelei prin punctul C la dreapta AB.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[CD]$.

(4p) **d)** Să se determine ecuația cercului care are ca diametru segmentul $[BC]$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\cos(\widehat{BAC})$.

(2p) **f)** Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine câte numere întregi n verifică relația $\dfrac{2n^2-11n+5}{2n^2+11}\le 0$.

(3p) **b)** Să se calculeze determinantul matricei $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

(3p) **c)** Să se determine numărul întreg m pentru care matricea $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ m & 3\end{pmatrix}$ are rangul 1.

(3p) **d)** Să se determine cel mai mare număr natural nenul p pentru care $\log_3 p<2$.

(3p) **e)** Să se arate că $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{27\cdot 28}=1-\dfrac{1}{28}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se determine câte puncte de extrem local are funcția f.

(3p) **d)** Să se determine câte rădăcini reale are ecuația $f(x)=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(2n)}{f(n)}$.

SUBIECTUL III (20p)

Conjugatul unui număr complex $z = a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbf{R}$, este numărul $\overline{z} = a - b \cdot i$.

Pe mulțimea $\mathbf{C}^*$ a numerelor complexe nenule se definește legea de compoziție "$\circ$"

prin $x \circ y = \dfrac{\overline{x}}{y}, \forall x, y \in \mathbf{C}^*$ și se consideră mulțimea $A = \left\{ z \in \mathbf{C}^* \middle| z^3 = 1 \right\}$.

(4p) **a)** Să se calculeze conjugatele numerelor $y_1 = 1 - i$ și $y_2 = 1$.

(4p) **b)** Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât $(1-i) \circ (1-i) = m + n \cdot i$.

(4p) **c)** Să se arate că există $u \in \mathbf{C}^*$ astfel încât $x \circ u = x, \forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că ***nu*** există $v \in \mathbf{C}^*$ astfel încât $x \circ v = x, \forall x \in \mathbf{C}$.

(2p) **e)** Să se arate că $z \cdot \overline{z} \in \mathbf{R}$, $\forall z \in \mathbf{C}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că există $\omega \in \mathbf{C}^*$ astfel încât $A = \{1, \omega, \overline{\omega}\}$.

(2p) **g)** Să se arate că "$\circ$" este lege de compoziție pe mulțimea *A*.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile

$f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{x}$, $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1 + x \cdot \operatorname{arctg} x$

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$ și $g'(x)$, $x \in [0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $\dfrac{1}{x} > \dfrac{x}{1 + x^2}, \forall x \geq 1$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$ și funcția g este convexă pe $[1, \infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția g este strict crescătoare pe $[1, \infty)$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 g(x) dx$.

(2p) **g)** Folosind eventual punctele **b)** și **c),** să se arate că

$$\frac{\sqrt{2007}}{2008} + \operatorname{arctg}\sqrt{2007} \in \left[\frac{\pi + 2}{4}, \frac{\pi + 4}{4} \right].$$