Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….067**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze partea reală a numărului complex $i^{16} + i^{18}$.

(4p) **b)** Să se determine conjugatul numărului $z = i + 2$.

(4p) **c)** Să se scrie ecuația unei drepte perpendiculare pe dreapta de ecuație $y = x + 2$.

(4p) **d)** Să se dea un exemplu de două puncte A și B care aparțin cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 4$.

(2p) **e)** Să se găsească o pereche (a,b) de numere naturale pentru care $\frac{\pi}{12} = a \cdot \frac{\pi}{3} - b \cdot \frac{\pi}{4}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{12}$, folosind eventual egalitatea $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$, adevărată pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

(3p) **b)** Să se determine cel mai mare număr întreg a pentru care $\det(A) > 4$.

(3p) **c)** Să se determine probabilitatea ca prin alegerea unui element a din mulțimea $\{0,2,4,6\}$ matricea A să fie inversabilă.

(3p) **d)** Să se determine numerele naturale a pentru care $\sqrt{6 - a} = 4 - a$.

(3p) **e)** Să se determine numerele reale a pentru care $\det(A) = 2a$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - x + \sin x$.

(3p) **a)** Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - f(x)}{x}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} (f(x))^x$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{Z}[X]$ a polinoamelor cu coeficienți întregi se consideră polinoamele

$f = X - 3$, $g = X^2 - 3X + 2$, $h = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ şi

$P_n = X^n - a_n \cdot X - b_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se arate că $h = f \cdot g$.

(4p) **b)** Să se determine restul împărțirii lui g la f.

(4p) **c)** Să se arate că polinoamele $h + g$ şi $h - g$ au două rădăcini comune.

(2p) **d)** Să se arate că dacă două polinoame q_1 şi q_2 din $\mathbf{Z}[X]$ au o rădăcină întreagă comună, atunci polinomul $q_1 + q_2$ are cel puțin o rădăcină întreagă.

(2p) **e)** Să se arate că pentru orice $a \in \mathbf{Z}$, $g(a)$ este un număr par.

(2p) **f)** Să se determine a_3 şi b_3 ştiind că polinomul P_3 se divide prin polinomul g.

(2p) **g)** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$ există o unică pereche (a_n, b_n) de numere întregi astfel încât polinomul P_n să se dividă prin g.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f_n : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot \ln x$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ se notează cu x_n rădăcina strict pozitivă a ecuației $f_n'(x) = 0$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_1'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $x_1 = \frac{1}{e}$ este punct de extrem local al funcției f_1.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f_1 este convexă pe $(0, \infty)$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\int_1^e f_2(x)dx$.

(2p) **e)** Să se arate că $\int_1^e f_2(x)dx \geq \int_1^e f_1(x)dx$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$.