EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….071**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze volumul unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei 3 şi înălțimea 4.

(4p) **b)** Să se afle aria triunghiului ABC cu $AB = 2, AC = 3$ şi $m\left(\hat{A}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(4p) **c)** Să se stabilească semnul numărului $tg1 \cdot ctg1$.

(4p) **d)** Să se afle coordonatele centrului de greutate al triunghiului cu vârfurile $A(2,3), B(-2,5), C(-3,-2)$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\sin\frac{7\pi}{3}$.

(2p) **f)** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,1)$ şi este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x + 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 - X + 1 \in \mathbf{C}[X]$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$.

(3p) **a)** Să se afle probabilitatea ca un element al mulțimii $\{-1,0,1\}$ să fie rădăcină a polinomului f.

(3p) **b)** Să se afle câtul şi restul împărțirii polinomului f la binomul $X + 1$.

(3p) **c)** Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

(3p) **d)** Să se afle valoarea expresiei $\frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_1 \cdot x_3}$.

(3p) **e)** Să se rezolve în intervalul $(0,+\infty)$ ecuația $f(\log_3 x) = 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2006^x + x^2$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **c)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

(3p) **d)** Să se demonstreze că funcția este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0, x = 1$.

SUBIECTUL III (20p)

În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră submulțimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in (-1,\infty) \right\}$.

(4p) **a)** Să se arate că $I_2 \in M$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul matricei $A(2)$.

(4p) **c)** Să se arate că $\det A(x) > 0$, $\forall A(x) \in M$.

(2p) **d)** Să se arate că $xy + x + y \in (-1,\infty)$, $\forall x, y \in (-1,\infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $A(x), A(y) \in M$, atunci $A(x) \cdot A(y) = A(xy + x + y)$.

(2p) **f)** Să se arate că pentru orice matrice $A(x) \in M$, există $A(x') \in M$ astfel încât

$A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = I_2$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că mulțimea M are o structură de grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x+1}$ și $g(x) = f(x) - \ln x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x), x \in (0,+\infty)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $g'(x), x \in (0,+\infty)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $f(1), g(1), g'(1)$.

(2p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **e)** Să se arate că funcția g este descrescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $\dfrac{2(x-1)}{x+1} \le \ln x$, $(\forall) x \in [1,+\infty)$.

(2p) **g)** Utilizând eventual rezultatul de la punctul anterior, să se arate că $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x \right) dx \le 0$.