EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta ….**080**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,2)$ şi $B(2,0)$.

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele O şi A.

(4p) **b)** Să se scrie ecuația cercului cu centrul în O şi raza OA.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos\left(O\hat{A}B\right)$.

(4p) **d)** Să se verifice că punctul $C(4,4)$ aparține cercului de ecuație $x^2+y^2-4x-4y=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze modulul numărului $\frac{3-4i}{5}$.

(2p) **f)** Să se calculeze partea reală a numărului $\left(\frac{3-4i}{5}\right)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pe $\mathbf{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-2x-2y+3$, $\forall\, x,y\in\mathbf{R}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\frac{3}{4}*\frac{1}{2}$.

(3p) **b)** Să se determine elementul neutru al legii „$*$”.

(3p) **c)** Să se determine simetricul numărului 4 în raport cu legea „$*$”.

(3p) **d)** Să se determine numerele reale x pentru care $\left(2^x\right)*\left(4^x\right)=1$.

(3p) **e)** Să se arate că mulțimea **Q - Z** nu este parte stabilă a lui **R** în raport cu legea „$*$”.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^4+2x^2+x+1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

(3p) **b)** Să se determine numărul real a pentru care $f(x)=\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se arate că $f(x)\geq\frac{1}{2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea

$M = \{ C(x) = xA + B \mid x \in \mathbf{R}^* \}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\det(A)$ şi $\operatorname{rang}(A)$.

(4p) **b)** Să se calculeze A^2, B^2 şi să se arate că $AB=BA$.

(4p) **c)** Arătați că mulțimea M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

(2p) **d)** Să se arate că $C(x)\cdot C(y) = C(y)\cdot C(x), \quad \forall C(x), C(y) \in M$.

(2p) **e)** Să se arate că toate matricele din M sunt inversabile şi să se calculeze $\left(C(2)\right)^{-1}$.

(2p) **f)** Să se arate că ecuația $A \cdot X = B$ nu are soluții în $M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **g)** Folosind metoda inducției matematice, să se arate că

$C^n(x) = C(x^n), \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall C(x) \in M$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = x(1+x)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi se defineşte şirul

$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_n'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f_n(x) - f_n(-1)}{x+1}$.

(4p) **c)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f_2 şi să se precizeze natura lor.

(2p) **d)** Să se studieze monotonia şirului $(I_n)_{n\geq 1}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 (1+x)^n dx$.

(2p) **f)** Să se arate că $f_n(x) = x\cdot C_n^0 + x^2 \cdot C_n^1 + x^3 \cdot C_n^2 + \ldots + x^{n+1} \cdot C_n^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se demonstreze egalitatea $\dfrac{C_n^0}{2} + \dfrac{C_n^1}{3} + \cdots + \dfrac{C_n^n}{n+2} = \dfrac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.