EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….090**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care $(1+2i)(2+i)=a+bi$.

(4p) **b)** Să se determine panta dreptei de ecuaţie $-x+y-3=0$.

(4p) **c)** Să se calculeze produsul de numere complexe $i \cdot i^2 \cdot ... \cdot i^{10}$.

(4p) **d)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$, astfel încât punctul $A(2, a)$ să aparţină dreptei de ecuaţie $x-ay+2=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze perimetrul triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2,1)$, $B(1,1)$ şi $C(1, 2)$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\sin 75^\circ$, folosind eventual egalitatea $\sin(a+b)=\sin a \cdot \cos b+\cos a \cdot \sin b$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{Z}_8$ ecuaţia $\hat{5}\hat{x}=\hat{7}$.

(3p) **b)** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât suma rădăcinilor ecuaţiei $x^2-(m+3)\cdot x-m+1=0$ să fie 5.

(3p) **c)** Să se arate că $\log_2 10-\log_2 5$ este un număr întreg.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^x-2=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element n din mulţimea $\{2,3,4,5\}$ să verifice relaţia $C_n^2<5$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x^3+4x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n^2+1}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră M mulțimea matricelor cu două linii şi două coloane şi toate elementele numere naturale şi matricele $E=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $E\in M$ şi că $I_2\in M$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $A,B\in M$, atunci $A+B\in M$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in M$, atunci $A\cdot B\in M$.

(2p) **d)** Să se găsească o matrice $C\in M$, astfel încât $\operatorname{rang}(C)=1$.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $D\in M$, astfel încât $\det(D)=2007$.

(2p) **f)** Să se arate că matricea E este inversabilă şi $E^{-1}\notin M$.

(2p) **g)** Să se determine toate matricele $X\in M$, inversabile, cu proprietatea că $X^{-1}\in M$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $x\in[1,e]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e}\right)\ge 0$.

(4p) **c)** Utilizând eventual inegalitatea de la punctul **b)**, să se arate că, dacă $x\in[1,e]$, atunci $\frac{1}{x}+\frac{x}{e}\le\frac{1+e}{e}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{e}\le\frac{1+e}{e}$, $\forall x\in[0,1]$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $u,v\in\mathbf{R}$, atunci $(u+v)^2\ge 4uv$.

(2p) **f)** Integrând inegalitatea de la punctul **d)**, să se arate că $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx+\frac{1}{e}\int_0^1 f(x)dx\le\frac{1+e}{e}$.

(2p) **g)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că $\left(\int_0^1 e^{x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)\le\frac{(e+1)^2}{4e}$.