SUBIECTUL II (30p) – Varianta 003

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2+B^2)$.

5p **b)** Să se justifice că, $\forall\, X, Y \in M_2(\mathbb{C})$, $\det(X \cdot Y)=\det(X)\cdot\det(Y)$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ și $X \cdot Y = Y \cdot X$, atunci $\det(X^2+Y^2)\geq 0$.

2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este un inel comutativ, unde $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = x \cdot y - 3x - 3y + 12$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$” este 4.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = a \cdot x + b$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2008 ori } x} = 2^{2008} + 3$.