SUBIECTUL II (30p) – Varianta 007

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases}x+2y+3z+4t=3\\ y+2z+3t=2\\ z+2t=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $XA=B$ nu are soluții $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.

2. Pentru fiecare $t,n\in\mathbb{Z}$, se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}2^n & 2^n\\ 2^n & 2^n\end{pmatrix}$ și mulțimile $G=\left\{A(k)\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$, $H_t=\left\{A(k\cdot t-1)\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, n,\ p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice $t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ și $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.