

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 027

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine rangul matricei $A + I_2$.

5p b) Să se demonstreze că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX = XA$, atunci există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

5p c) Să se demonstreze că ecuația $Y^2 = A$ nu are nicio soluție în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x * y = x + y + xy$.

5p a) Să se arate că legea „ $*$ ” este asociativă.

5p b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Să se verifice relația $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2008}$.