SUBIECTUL II (30p) – Varianta 027

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei $A+I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX=XA$, atunci există $x, y\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $Y^2=A$ nu are nicio soluție în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=x+y+xy$.

5p **a)** Să se arate că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. Să se verifice relația $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2008}$.