

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 029

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + y + z = m - 1, \quad m \in \mathbb{R} \text{ și matricea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}. \\ x + my + 2z = -1 \end{cases}$$

5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A) = 0$.

5p b) Să se arate că sistemul are soluție pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are o soluție de forma $(a, b, -1)$.

2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulțimea $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$ și matricele

$$O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \text{ și } I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

5p a) Să se verifice că dacă $x, y \in \mathbb{Z}_3$, atunci $x^2 + y^2 = \hat{0}$ dacă și numai dacă $x = y = \hat{0}$.

5p b) Să se arate că mulțimea $H = G \setminus \{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^2 = I_2, X \in G$.