SUBIECTUL II (30p) – Varianta 055

1. Matricea $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=(a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a^2+b^2\le 1$, atunci șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a=1$ și $b=\sqrt{3}$, atunci $x_{n+6}=64x_n$, $\forall n\ge 0$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că $A^n=I_3$ dacă și numai dacă 4 divide *n*.

5p **b)** Fie $G=\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$. Să se arate că G, împreună cu operația de înmulțire a matricelor, formează un grup comutativ cu patru elemente.

5p **c)** Să se calculeze $\det\left(I_3+A+A^2+...+A^{2008}\right)$.