SUBIECTUL II (30p) – Varianta 063

1. Se notează X^t transpusa matricei X şi se consideră mulțimile $P=\{S\in M_2(\mathbb{R})\mid S^t=S\}$ (matrice simetrice) şi $Q=\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid A^t=-A\}$ (matrice antisimetrice).

5p **a)** Să se arate că $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\in P$ şi $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\in Q$.

5p **b)** Să se arate că dacă $A,B\in Q$, atunci $AB\in P$.

5p **c)** Să se arate că $\det(X)\geq 0$, oricare ar fi $X\in Q$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+2X^2+3X+45\in\mathbb{Z}[X]$ şi $\hat{f}=X^3+X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_2[X]$.

5p **a)** Să se arate că rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului f nu sunt toate reale.

5p **b)** Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.