

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 078

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = -1 \\ x + 9y + mz + t = 3 \\ 5x - 6y + 10z + nt = p \end{cases}, m, n, p \in \mathbb{R}.$$

- 5p** a) Să se determine p astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0, y_0, z_0, t_0) cu $z_0 = t_0 = 0$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $m, n \in \mathbb{R}$, rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.
- 5p** c) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.
2. Fie mulțimea $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \text{ și } n \text{ sunt impare} \right\}$ și $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G se definește legea de compoziție $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2), \forall q_1, q_2 \in Q_0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
- 5p** a) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.
- 5p** b) Să se calculeze $(1, 1) * (1, 2) * \dots * (1, 2008)$.
- 5p** c) Să se arate că funcția $f : G \rightarrow \mathbb{Q}^*, f((q, k)) = q2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{Q}^*, \cdot) .