SUBIECTUL II (30p) – Varianta 099

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(AA^t+xB)$.

5p **a)** Să se calculeze AA^t.

5p **b)** Să se arate că $f(0)\geq 0$.

5p **c)** Să se arate că există $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=mx+n$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră mulțimea de numere complexe $G=\left\{\cos q\pi + i\sin q\pi \,\middle|\, q\in\mathbb{Q}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in G$.

5p **b)** Să se arate că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

5p **c)** Să se arate că polinomul $f=X^6-1\in\mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în G.