

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p) – Varianta 015**

1. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , se consideră funcția  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n - nx + 1$ .
- 5p a) Să se arate că  $f_n$  este strict descrescătoare pe  $(0; 1]$  și strict crescătoare pe  $[1; \infty)$ .
- 5p b) Să se arate că ecuația  $f_n(x) = 0$ ,  $x > 0$  are exact două rădăcini  $a_n \in (0, 1)$  și  $b_n \in (1, \infty)$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , unde șirul  $a_n$  a fost definit la punctul b).
2. Se consideră șirul  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , unde  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$  și  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p a) Să se arate că  $I_0 = \frac{\pi}{4}$ .
- 5p b) Să se arate că  $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- 5p c) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \right) = I_0$ .