SUBIECTUL III (30p) – Varianta 015

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, se consideră funcția $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

5p **a)** Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $(0;1]$ şi strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f_n(x) = 0,\ x > 0$ are exact două rădăcini $a_n \in (0,1)$ şi $b_n \in (1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde şirul a_n a fost definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ şi $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx,\ n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right) = I_0$.