

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 042

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ și șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit de $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p a) Să se demonstreze că funcția f' este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.
- 5p c) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p a) Să se calculeze I_2 .
- 5p b) Să se demonstreze că $I_n = \frac{n}{4n+2} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.