

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p) – Varianta 051**

1. Se consideră funcția  $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ .

**5p** a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - f(x))^x$ .

**5p** b) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare.

**5p** c) Să se arate că funcția  $f$  este bijectivă.

2. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și funcția  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ .

**5p** a) Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât funcția  $F$  să fie primitiva unei funcții  $f$ .

**5p** b) Să se calculeze  $\int_1^e \frac{1}{x F(x)} dx$ .

**5p** c) Să se arate că, pentru funcția  $h : [1, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = (F(x) - 1) \sin x$ , are loc relația  $\int_1^\pi h(x) h''(x) dx \leq 0$ .