

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 067

1. Se consideră o funcție de două ori derivabilă $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(0) = 0$ și $f'(0) = 1$.

5p a) Să se arate că ipoteza este verificată în cazul în care $f(x) = e^x \sin x, \forall x \in [-1, 1]$.

5p b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}} = e^{f'(0)}$.

5p c) Să demonstreze că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \frac{nf''(0)}{2}$.

2. Fie funcțiile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$ și $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

5p a) Să se arate că $g(x) = \ln(1+x)$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx$.

5p c) Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \leq n \ln 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.