SUBIECTUL II (30p) – Varianta 092

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi submulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AX=XA\right\}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se demonstreze că $A^2X=XA^2$, oricare ar fi $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p c) Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci matricea $aI_3+bA\in G$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(1+X+X^2\right)^{1004}$, cu forma algebrică $f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_{2008}X^{2008}$.

5p a) Să se calculeze $f(-1)$.

5p b) Să se arate că $a_0+a_1+a_2+...+a_{2008}$ este un număr întreg impar.

5p c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2-1.