

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 033

1. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x + e^x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că $-1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Utilizând eventual inegalitatea $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$, adevărată pentru orice $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$, să se

demonstreze că $\frac{1}{2} \leq 2009 \cdot I_{2008} \leq 1$.