

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p) – Varianta 038**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

**5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**5p** b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .

**5p** c) Știind că  $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  este funcția definită prin  $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ , să se determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2008}) + x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră integralele  $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

**5p** a) Să se calculeze  $I_0$ .

**5p** b) Să se arate că  $I_n \leq I_{n+1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

**5p** c) Utilizând metoda integrării prin părți să se demonstreze că are loc relația  $I_n = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .