SUBIECTUL III (30p) – Varianta 046

Fie sistemul de ecuații (S) $\begin{cases}(2+a^2)x+y+z=1\\ x+(2+b^2)y+z=1\\ x+y+z=1\end{cases}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}2+a^2 & 1 & 1\\ 1 & 2+b^2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=b=0$, să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Pentru $a=b=0$, să se calculeze A^2.

5p **c)** Să se arate că $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, nu este soluție a sistemului (S), oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Să se arate că $\det(A)\geq 1, \forall a,b\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Folosind, eventual, relația $\det(A)\det(A^{-1})=1$, să se determine matricea $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, pentru care $A^{-1}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **f)** Să se rezolve sistemul (S) pentru $a=0,\ b=0$.