

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 097

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \mid \det(X) \text{ este număr par}\}$.

5p a) Să se arate că $A + I_3 \in M$.

5p b) Să se verifice că $(A + I_3)^2 = 3A + I_3$.

5p c) Să se calculeze $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{12}$.

5p d) Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $\det(A + xI_3) = 0$.

5p e) Să se arate că $AX \in M$, oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

5p f) Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. Să se arate că $B \in M$ oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$.