SUBIECTUL III (30p) – Varianta 100

Se consideră matricele $X(a)=\begin{pmatrix} 2a & a+1 & a+2 \\ 0 & a-1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, şi $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru o matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează cu $S_1(A)$ suma elementelor din prima coloană, cu $S_2(A)$ suma elementelor din a doua coloană, cu $S_3(A)$ suma elementelor din a treia coloană şi cu M mulțimea de matrice $M=\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid S_1(A)=S_2(A)=S_3(A)\}$.

5p **a)** Să se arate că $I_3\in M$.

5p **b)** Să se calculeze $X(1)-2I_3$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $B=\begin{pmatrix} 2a & -7 & 2 \\ 2-2b & 2a-1 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ să aparțină mulțimii M.

5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $\det\left(X(a)+I_3\right)=6$.

5p **e)** Să se arate că oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, matricea $C=X(a)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M.

5p **f)** Să se demonstreze că pentru orice matrice $A,B\in M$, matricea $A+B$ aparține mulțimii M.