SUBIECTUL III (30p) – Varianta 050

Fie funcțiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ şi $h_{p,q}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h_{p,q}(x)=p\cdot x+\frac{q}{\sqrt{x}}$, $p,q\in\mathbb{Q}$.

5p **a.** Să se determine $p,q\in\mathbb{Q}$ pentru care *f* este o primitivă a funcției $h_{p,q}$.

5p **b.** Să se arate că $\int_1^2 f\left(x^2\right)dx<8$.

5p **c.** Să se arate că dacă $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției *f*, atunci $F\left(\sqrt{2}\right)<F\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

5p **d.** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{Z}$, există $p\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\int_1^3 h_{p,0}(x)dx=m$.

5p **e.** Să se dea un exemplu, justificând alegerea făcută, de funcție neconstantă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $\int_{-1}^1 g(x)dx\in\mathbb{Z}$.

5p **f.** Să se arate că există $p,q\in\mathbb{Z}^*$ astfel încât $\int_1^4 h_{p,0}(x)dx=\int_1^4 h_{0,q}(x)dx$.