SUBIECTUL III (30p) – Varianta 083

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi mulțimea de matrice

$$M=\left\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\;\middle|\; X=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&b\\c&0&0\end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

5p **a)** Să se arate că dacă $B=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&2&2\\1&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&-2&1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$, atunci $B\in M$.

5p **b)** Să se arate că matricea $C=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&-6&2\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&3&1\\3&0&0\\9&0&3\end{pmatrix}$ aparține mulțimii M.

5p **c)** Să se calculeze $\det(A+2I_3)$.

5p **d)** Să se arate că A^2 este inversa matricei A.

5p **e)** Să se determine $Y\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ din ecuația matriceală $(A+I_3)\cdot Y=\begin{pmatrix}-1\\3\\-6\end{pmatrix}$.

5p **f)** Fie $X,Y\in M$, $X=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&b\\c&0&0\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&y\\z&0&0\end{pmatrix}$, cu $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}^*$ şi cu proprietatea că $XY=YX$. Să se demonstreze că dacă numerele $a,\ b,\ c$ sunt în progresie geometrică de rație $q\in\mathbb{R}$, atunci şi numerele $x,\ y,\ z$ sunt în progresie geometrică de aceeaşi rație q.