SUBIECTUL II (30p) **Varianta 1**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi $b \neq 0$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$, $y_n = \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_7$ şi polinomul $f = \mathrm{X}^6 + a\mathrm{X} + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[\mathrm{X}]$.

5p **a)** Să se verifice că, pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, are loc relația $b^6 = \hat{1}$.

5p **b)** Să se arate că $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

SUBIECTUL II (30p) <u>**Varianta 2**</u>

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$.

5p **b)** Să se calculeze $(A - A^t)^{2009}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^5 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pentru a, b din mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

5p **a)** Să se arate că dacă $a, b \in M$, atunci $a * b \in M$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 3**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice egalitatea $A^2-A=2I_3$.

5p **b)** Să se calculeze A^{-1}.

5p **c)** Să se arate că $A^{2009}+A^{2008}=2^{2008}(A+I_3)$.

2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este un inel comutativ, unde $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=x\cdot y-3x-3y+12$, $\forall\, x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$” este 4.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z},*,\circ)$ şi $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=a\cdot x+b$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2009 ori } x}=2^{2009}+3$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei A.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A^t \cdot A)=0$.

5p **c)** Să se determine o matrice nenulă $B\in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Q})$ astfel încât $AB=O_2$.

2. Se ştie că $(G,\circ)$ este grup, unde $G=(3,\infty)$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to G$, $f(x)=x+3$.

5p **a)** Să se calculeze $4\circ 5\circ 6$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este un izomorfism de grupuri, de la $((0,\infty),\cdot)$ la $(G,\circ)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă H este un subgrup al lui G care conține toate numerele naturale $k\geq 4$, atunci H conține toate numerele raționale $q>3$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 5**

1. Se consideră punctele $A(0,6)$, $B(1,4)$, $C(-1,8)$ şi matricea $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & a\\ 6 & 4 & 8 & b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.

5p **b)** Să se determine rangul matricei M în cazul $a=3, b=0$.

5p **c)** Să se arate că dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M, care conțin ultima coloană, este nul, atunci $\text{rang}(M)=2$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $x*y=5xy+6x+6y+6$.

5p **a)** Să se arate că legea “$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea “$*$”.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $\underbrace{x*x*x*...*x}_{\text{de 2009 ori } x}=-1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$.

5p **a)** Să se calculeze σ^{2009}.

5p **b)** Să se dea exemplu de o permutare $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma \neq e$ şi $(\tau\sigma)^2 = e$.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru orice $\tau \in S_5$, există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\tau^p = e$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{C}$, x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x - a = 0$ şi determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}.$$

5p **a)** Pentru $a = 1$, să se determine x_1, x_2 şi x_3.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 7**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul $\begin{cases}x+2y+3z+4t=3\\ y+2z+3t=2\\ z+2t=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $XA=B$ nu are soluții $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 2^k\\ 2^k & 2^k\end{pmatrix} \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, şi pentru fiecare $t\in\mathbb{Z}$ notăm cu $H_t=\left\{A(kt-1)\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot\,)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, n,\, p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice $t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot\,)$.

5p **c)** Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A^{2n} = \dfrac{2^{2n}-1}{3}A + \dfrac{2^{2n}+2}{3}I_3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^3 - x + a = 0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$.

5p **b)** Să se determine x_2 şi x_3 ştiind că $x_1 = 2$.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ trei puncte din plan şi matricea $M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că, dacă A, B, C se află pe dreapta de ecuație $y = 2x$, atunci $\det(M) = 0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic şi are catetele de lungime 1, atunci $\det(M) = \pm 1$.

5p **c)** Să se arate că, dacă matricea M este inversabilă, atunci suma elementelor matricei M^{-1} este 1.

2. Se consideră mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $X \in A$ şi $Y \in A$, atunci $X + Y \in A$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X \in A, Y \in A$ şi $XY = O_2$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$.

5p **c)** Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea şi înmulțirea matricelor. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

Varianta 10

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutările $e, \alpha \in S_3$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze α^3.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\alpha^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este permutare impară.

2. Fie inelul $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se dea exemplu de un număr complex z astfel încât $z \notin \mathbb{Z}[i]$ și $z^2 \in \mathbb{Z}[i]$.

5p **b)** Să se determine elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}[i]$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea $H = \{(m+n) + (m-n)i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}[i]$ în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ şi matricea transpusă A^t.

5p **a)** Pentru $a = c = 1$ şi $b = d = 0$, să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, unde $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1.$

5p **a)** Să se demonstreze că $|a| \leq 3.$

5p **b)** Să se arate că, dacă $c < 0$, polinomul are cel puţin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a = 1, c = -1,$ atunci $b = -1.$

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2 și $g = aX^2 + bX + c$, cu $a \neq 0$. Fie matricele $A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $\det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^4 + \hat{4}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})$ și $f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p **c)** Să se descompună polinomul $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$. Pentru fiecare $m\in\mathbb{R}$, notăm cu S_m mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $\min\left\{x^2+y^2+z^2 \mid (x,y,z)\in S_1\right\}$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A\cdot B$ şi mulțimea

$$G=\left\{ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, \det(X)=1\right\}.$$

5p **a)** Să se verifice că $A^4=B^6=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi, cu elemente numere complexe.

5p **c)** Să se demonstreze că $C^n\neq I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 14

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei A.

5p **b)** Să se arate că există $d \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = dA$.

5p **c)** Să se arate că există matricele $K \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ şi $L \in M_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $A = K \cdot L$.

2. Se consideră numărul $a=\sqrt{3}-i \in \mathbb{C}$ şi polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 4X^2 + 16$.

5p **a)** Să se arate că $f(a)=0$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $a + b + c \neq 0$ şi A nu este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$, atunci $a = b = c$.

5p **c)** Să se arate că sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax + by + cz = \frac{1}{2}x \\ cx + ay + bz = \frac{1}{2}y \\ bx + cy + az = \frac{1}{2}z \end{cases}$ admite numai soluția $x = y = z = 0$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 5X^2 + 5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul *f* are toate rădăcinile reale.

5p **c)** Să se arate că dacă *g* este un polinom cu coeficienți reali care are proprietatea că pentru orice *x* real $|g(x)| \leq |f(x)|$, atunci există $a \in [-1, 1]$ astfel încât $g = af$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{ X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a,b\in\mathbb{R},\; a>0 \right\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $A,B\in G$, atunci $AB\in G$.

5p **b)** Să se găsească două matrice $C,D\in G$ pentru care $CD\neq DC$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A\in G$, atunci $I_2-A+A^2\in G$.

2. Se consideră $a,b,c\in\mathbb{Q}$ şi polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c astfel încât polinomul *f* să aibă rădăcinile $x_1=x_2=1$ şi $x_3=-2$.

5p **b)** Să se arate că dacă *f* are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci *f* are o rădăcină rațională.

5p **c)** Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ şi $f(1)$ sunt impare, atunci polinomul *f* nu are rădăcini întregi.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2-B^2.

5p **b)** Să se calculeze $\det(I_2+A+A^2+A^3+A^4)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{Z})$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ şi $g=X^2-1$.

5p **a)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se calculeze $(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot(1-x_3)\cdot(1-x_4)$.

5p **c)** Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)$.

Varianta 18

SUBIECTUL II (30p)

http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se afle rangul matricei I_3+A+A^t.

5p **c)** Să se determine inversa matricei I_3+A.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^3+4aX^2+20X+b$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine x_1,x_2,x_3 în cazul $a=2,\ b=0$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=8(4a^2-15)$.

5p **c)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=0 \\ x+y-z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \end{cases}$ şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 - 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că $f(x) = x^2\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x - \frac{1}{x}\right) + a + 2\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră triunghiul *ABC*, cu laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ şi sistemul $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$.

5p **a)** Să se rezolve sistemul în cazul $a = 3, b = 4, c = 5$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluție unică.

5p **c)** Ştiind că soluția sistemului este (x_0, y_0, z_0), să se demonstreze că $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *G*.

5p **b)** Să se arate că $AB \in G$, pentru orice $A, B \in G$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor din mulțimea *G* care au determinantul nul.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Ştiind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluţii (x, y, z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \; a,b,c \in \mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulţimii G.

5p **b)** Să se dea un exemplu de matrice $A \in G$ cu proprietatea că $\det A \neq \hat{0}$ şi $\det A^2 = \hat{0}$.

5p **c)** Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, distincte două câte două şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul $a+b+c\neq 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $a+b+c=0$, atunci sistemul este incompatibil.

2. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $a_0=0$ şi $a_{n+1}=a_n^2+1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ şi polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, cu $f(0)=0$ şi cu proprietatea că $f(x^2+1)=(f(x))^2+1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(5)$.

5p **b)** Să se arate că $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $f(a_n)=a_n$.

5p **c)** Să se arate că $f=X$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\left\{ X=\begin{pmatrix}a & 5b\\ b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{C}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\ X\in C(A)$, $XA=AX$.

5p **b)** Să se arate că dacă $Y\in C(A)$ şi $Y^2=O_2$, atunci $Y=O_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $Z\in C(A), Z\neq O_2$ şi Z are toate elementele raționale, atunci $\det Z\neq 0$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_3$ şi polinomul $f=X^3+\hat{2}X^2+a\in\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})$.

5p **b)** Pentru $a=\hat{2}$, să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f .

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră o matrice $A\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Se notează cu A^t transpusa matricei *A*.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall\, z\in \mathbb{C}$, $\forall\, X\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(zX)=z^3\det(X)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A-A^t)=0$.

5p **c)** Ştiind că $A\neq A^t$, să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A-A^t)=2$.

2. Se consideră polinomul $f\in \mathbb{Q}[X]$, cu $f=X^4-5X^2+4$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile polinomului *f*.

5p **b)** Să se determine polinomul $h\in \mathbb{Q}[X]$, pentru care $h(0)=1$ şi ale cărui rădăcini sunt inversele rădăcinilor polinomului *f*.

5p **c)** Ştiind că *g* este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=2$, să se arate că ecuația $g(x)=0$ nu are soluții întregi.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea S_3 a permutărilor de 3 elemente se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că permutarea σ este pară.

5p **b)** Să se determine toate permutările $x \in S_3$, astfel încât $x\sigma = \sigma x$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x^2 = \sigma$, cu $x \in S_3$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G = \left\{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$.

5p **b)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup abelian, unde „$\cdot$” reprezintă înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)...X(2009) = X(t-1)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, cu $t\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ B^n=\begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^2=A$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=3X^4-2X^3+X^2+aX-1\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$, unde $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $(X-1)^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei $A+I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX = XA$, atunci există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $Y^2 = A$ nu are nicio soluție în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = x + y + xy$.

5p **a)** Să se arate că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1$. Să se verifice relația $f(x*y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2008}*\frac{1}{2009}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(A-xI_2)=0$.

5p **b)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$

5p **c)** Să se determine numărul de soluții ale ecuației $X^3=A$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea de funcții $G=\left\{ f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\, f_{a,b}(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f_{-1,2}\circ f_{-1,2}$, unde „$\circ$” este compunerea funcțiilor.

5p **b)** Să se demonstreze că $(G,\circ)$ este un grup.

5p **c)** Să se arate că grupul G conține o infinitate de elemente de ordin 2.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 29**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1, \\ x+my+2z=-1 \end{cases}$ $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu $z_0=2$.

2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \,\middle|\, X=\begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix}\right\}$ şi matricele

$O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $x, y\in\mathbb{Z}_3$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$ dacă şi numai dacă $x=y=\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=G\setminus\{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=I_2,\ X\in G$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră numerele reale a, b, c, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+2x+3$ şi determinanții

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix} \text{ şi } B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ f(a) & f(b) & f(c)\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Să se arate că $A=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p **b)** Să se arate că $A=B$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\left\{X(a)=I_2+aA \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$, $X(a)X(0)=X(a)$ şi $X(a)X(b)=X(a+b-10ab)$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=\left\{X(a)\,\middle|\, a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{10}\right\}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=I_2,\ X\in G$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $x \in \mathbb{C}$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **a)** Să se verifice că $\left(A(x)\right)^2 = 2xA(x)$.

5p **b)** Să se determine toate numerele complexe x pentru care $\left(A(x)\right)^4 + \left(A(x)\right)^2 = O_2$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2 = A(0)$, $X \in M_2(\mathbb{C})$ nu are soluții.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$, care are forma algebrică

$f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + ... + a_1X + a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $a_{100} + a_{99}$.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul matricei sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Să se rezolve sistemul în cazul $a=-2$.

2. Se consideră mulțimea $G\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Q},\ a^2-10b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A=\begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}\in G$.

5p **b)** Să se arate că $X\cdot Y\in G$, pentru oricare $X,Y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = aI_3 + bB + cB^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze B^3.

5p **b)** Să se calculeze B^{-1}.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b+c)\det(A) \geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ şi $H = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_7\}$.

5p **a)** Să se arate că $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$ există $x, y \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât $a = x^2 + y^2$.

5p **c)** Să se arate că $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ şi $A = LK$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei A.

5p **b)** Să se arate că $A^2 = 32A$.

5p **c)** Să se arate că rangul matricei A^n este 1, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = axy - x - y + 6$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, unde a este o constantă reală.

5p **a)** Pentru $a = \dfrac{1}{3}$, să se demonstreze că legea „$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se arate că legea „$*$" admite element neutru dacă şi numai dacă $a = \dfrac{1}{3}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă intervalul $[0, 6]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$", atunci $a \in \left[\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}\right]$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 35** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că ecuația $AX=B$ are o infinitate de soluții $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se verifice că $A^3=10A$.

5p **c)** Să se determine rangul matricei A^*, adjuncta matricei A.

2. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, funcția $f:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}$,

$f(a+b\sqrt{2})=a^2-2b^2$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ şi mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \mid f(x)=-1\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $7+5\sqrt{2}\in A$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $f(xy)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea A este infinită.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 36

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $A^2 = O_2$.

5p **a)** Să se arate că $a + d = 0$.

5p **b)** Să se arate că matricea $I_2 + A$ este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că ecuația $AX = O_2$ are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 9$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, numărul $a = \sqrt{2} + i$ şi mulțimile $A = \left\{ g(a) \mid g \in \mathbb{Q}[X] \right\}$ şi $B = \left\{ h(a) \mid h \in \mathbb{Q}[X], \text{grad}(h) \leq 3 \right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(a)$.

5p **b)** Să se calculeze $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$.

5p **c)** Să se arate că $A = B$.

Varianta 37

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A-A^t\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\operatorname{rang} A\geq 2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p,q,r\in(0,\infty)$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcție de p, q şi r.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt trei numere reale astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ şi $abc<0$, atunci $a, b, c\in(-\infty, 0)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ şi mulțimea de matrice $M=\left\{\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix} \middle|\, a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ şi $AX=XA$, atunci $X\in M$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.

2. Se consideră polinomul $f=aX^4+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că numărul $f(3)-f(1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$, numărul $f(x)-f(y)$ este divizibil cu $x-y$.

5p **c)** Să se determine coeficienții polinomului *f* ştiind că $f(1)=4$ şi $f(b)=3$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul, în cazul în care a,b,c sunt distincte două câte două.

5p **c)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului, în cazul în care $a=b\neq c$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{a+b\sqrt{5} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-5b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $x=9+4\sqrt{5}\in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că M este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea M are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $S = A - XY$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$.

5p **c)** Să se arate că $A^{n+1} = 14A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi numărul $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon) = 0$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = 0 \\ x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = 0 \end{cases}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă f divide $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2 f_3(X^3)$, unde f_1, f_2, f_3 sunt polinoame cu coeficienți complecşi, atunci fiecare dintre polinoamele f_1, f_2, f_3 este divizibil cu $X - 1$.

1. Pentru $p, q, r \in \mathbb{C}$, se consideră sistemul $\begin{cases} x + py + p^2 z = p^3 \\ x + qy + q^2 z = q^3 \\ x + ry + r^2 z = r^3 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (p - q)(q - r)(r - p)$.

5p **b)** Dacă *p, q, r* sunt distincte, să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se arate că, dacă sistemul are soluția $(-1,1,1)$, atunci cel puțin două dintre numerele p, q, r sunt egale.

2. Se consideră inelul $(A,+,\cdot)$ unde $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *A*.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea *A* ecuația $X^2 = I_2$.

5p **c)** Să se arate că $(A,+,\cdot)$ nu este corp.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $AB - BA = A$ şi matricele $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A_0.

5p **b)** Să se arate că $A_0 B_0 - B_0 A_0 = A_0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^n B - BA^n = nA^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.

5p **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul *f* să se dividă cu polinomul $X^2 - 1$.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluția $x = i \in \mathbb{C}$.

5p **c)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică şi, în plus, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{N}\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\in M$.

5p **a)** Câte matrice din mulțimea M au suma elementelor egală cu 1?

5p **b)** Să se arate că $A^{-1}\notin M$.

5p **c)** Să se determine toate matricele inversabile $B\in M$ care au proprietatea $B^{-1}\in M$.

2. Se consideră ecuația $x^4-8x^3+ax^2+8x+b=0$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ şi cu soluțiile $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se arate că $(x_1+x_4)(x_2+x_3)+x_1x_4+x_2x_3+(x_1+x_4)x_2x_3+(x_2+x_3)x_1x_4=a-8$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_4=x_2+x_3$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât x_1, x_2, x_3, x_4 să fie în progresie aritmetică.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 44** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $AB+BA$.

5p **b)** Să se arate că $\operatorname{rang}(A+B)=\operatorname{rang}A+\operatorname{rang}B$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(A+B)^n=A^n+B^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+4X^2+1\in\mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{C}$ astfel încât polinomul *f* să se dividă cu $X+1$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $g=X^4+4X^2+aX+1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{1}{x_4}$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{C}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A)=\left\{ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; XA=AX \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $B\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $x, y\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuaţia $X+X^2=A$.

2. Se consideră mulţimea $G=(-1,1)$, funcţia $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ şi corespondenţa

$(x,y)\to x*y$, unde $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x, y\in G$.

5p **a)** Să se arate că această corespondenţă defineşte o lege de compoziţie pe G.

5p **b)** Să se arate că $\forall x, y\in G$, $f(x*y)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Ştiind că operaţia "$*$" este asociativă, să se calculeze $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*...*\dfrac{1}{9}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall\, x\in \mathbb{R}$, $\det\left(A-xI_2\right)=x^2-(a+d)x+ad-bc$.

5p **b)** Dacă $A^2=O_2$, să se demonstreze că $a+d=0$.

5p **c)** Ştiind că $A^2=O_2$, să se calculeze $\det\left(A+2I_2\right)$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{(a,b)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a^2-3b^2=1\right\}$ şi operaţia $(a,b)*(c,d)=(ac+3bd,\, ad+bc)$.

5p **a)** Să se determine $a\in \mathbb{Z}$ pentru care $(a,15)\in G$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $(a,b),(c,d)\in G$, $(a,b)*(c,d)\in G$.

5p **c)** Să se arate că $(G,*)$ este grup.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX-XA$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se calculeze $f(B)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $f(X)=B$ nu are soluții.

2. Se consideră polinoamele $f, g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+a^2X-a$, $g=aX^3-a^2X^2-1$, cu $a\in\mathbb{R}^*$ şi $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f.

5p **a)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Să se arate că rădăcinile polinomului g sunt inversele rădăcinilor polinomului f.

5p **c)** Să se arate că polinoamele f şi g nu au rădăcini reale comune.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$, unde a şi b sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.

5p **b)** Să se determine valorile parametrilor $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate există o infinitate de valori ale numerelor a şi b pentru care sistemul admite o soluție (x,y,z), cu x, y, z în progresie aritmetică.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{ X(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $X(t)\cdot X(u)=X(t+u),\ \forall t,u\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine $t\in\mathbb{R}$ ştiind că $X(t)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea G formează grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $a \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ z + x = 1 \end{cases}$ şi A matricea sa.

5p **a)** Să se arate că $\det A \neq 0$.

5p **b)** Să se arate că soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

5p **c)** Să se determine inversa matricei A.

2. Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție dată de relația $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ şi mulțimea $G = (5, \infty)$.

5p **a)** Să se arate că legea $"*"$ are element neutru.

5p **b)** Să se demonstreze că G este grup abelian în raport cu legea $"*"$.

5p **c)** Să se rezolve în grupul $(G, *)$ sistemul $\begin{cases} x * y = z \\ y * z = x \\ z * x = y \end{cases}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, transpusa $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B = AA^t$, şi punctele $P_k(a_k, b_k)$, unde $k \in \{1, 2, 3\}$.

5p **a)** Să se calculeze B ştiind că $P_1(1,2)$, $P_2(2,4)$, $P_3(-3,-6)$.

5p **b)** Să se arate că $\det(B) \geq 0$, oricare ar fi punctele P_1, P_2, P_3.

5p **c)** Să se arate că $\det(B) = 0$ dacă şi numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că $AB \in M$, pentru orice $A, B \in M$.

5p **c)** Să se arate că $(M, \cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie şirul $(F_n)_{n\geq 0}$, dat de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_0 = 0, F_1 = 1$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice relaţia $A^2 = A + I_2$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X \in M_2(\mathbb{Q})$, $X \neq O_2$ şi $AX = XA$, atunci X este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \geq 1$.

2. Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\sigma\pi \neq \pi\sigma$.

5p **b)** Să se determine numărul elementelor mulţimii $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

5p **c)** Să se arate că $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului $(S_5, \cdot)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine σ^{-1}.

5p **b)** Să se arate că permutările σ şi σ^{-1} au acelaşi număr de inversiuni.

5p **c)** Să se arate că ecuația $x^4 = \sigma$ nu are soluții în grupul $(S_6, \cdot)$.

2. Fie legea de compoziție „$\circ$”, definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = xy - x - y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, şi funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

5p **a)** Să se arate că $(1, \infty)$ este parte stabilă în raport cu „$\circ$”.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea „$\circ$” este asociativă, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 10 ori } x} = 1025$.

Varianta 53

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$. Se consideră matricele $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X, Y \in C(A)$, atunci $X + Y \in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $E_1, E_2 \in C(A)$, atunci există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $A = \alpha I_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $C(A)$ conține trei dintre matricele E_1, E_2, E_3, E_4, atunci o conține şi pe a patra.

2. Fie $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5, \cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în S_5 ecuația $ax = b$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului ab în grupul $(S_5, \cdot)$.

5p **c)** Fie $k \in \mathbb{Z}$ cu $b^k = e$. Să se arate că 6 divide k.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $AB\neq BA$.

5p **b)** Să se arate că $A^4+B^6=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $(AB)^n\neq I_2$.

2. Se consideră şirul $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $\forall n\geq 1$ şi polinoamele

$P, Q_n\in\mathbb{Z}[X]$, $P=X^2-X-1$, $Q_n=X^n-F_nX-F_{n-1}$, $\forall n\geq 2$.

5p **a)** Să se arate că polinomul X^3-2X-1 este divizibil cu P.

5p **b)** Să se determine rădăcinile reale ale polinomului Q_3.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\geq 2$, polinomul Q_n este divizibil cu P.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 55** http://www.pro-matematica.ro

1. Matricea $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a^2+b^2 \le 1$, atunci şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a=1$ şi $b=\sqrt{3}$, atunci $x_{n+6} = 64x_n$, $\forall n \ge 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$.

5p **a)** Să se arate că ecuația $x^2 = \hat{8}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}$.

5p **b)** Să se determine numărul polinoamelor de grad doi din $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

5p **c)** Să se arate că polinomul $X^2 + X + \hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi funcţia $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX$.

5p **a)** Să se arate că $f(A)=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $f(X+f(X))=X+f(X), \forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că funcţia f este bijectivă.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $M=\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.

5p **b)** Să se arate că $G=\{X \in M \mid \det X \neq 0\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

5p **c)** Să se determine elementele de ordin doi din grupul G, definit la punctul **b)**.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 57** http://www.pro-matematica.ro

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, cu $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $x_0 = 1, y_0 = 0$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, y_1 şi y_2.

5p **b)** Să se arate că $x_n + y_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că $x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0$, $\forall n \geq 0$.

2. Se consideră mulţimile de clase de resturi $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$ şi $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ ecuația $\hat{3}x^2 + \hat{4} = \hat{0}$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului $\hat{3}$ în grupul $\left(\mathbb{Z}_7^*, \cdot\right)$.

5p **c)** Să se arate că nu există niciun morfism de grupuri $f : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ cu $f\left(\overline{2}\right) = \hat{3}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 58**

1. Fie $a,b,c,d>0,$ matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi funcţia $f:(0,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Se notează $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că dacă $\det A=0$, atunci f este funcţie constantă.

5p **b)** Să se arate că, dacă $\det A\neq 0,$ atunci funcţia f este injectivă.

5p **c)** Să se arate că $\big(\underbrace{f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f}\big)(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\{I_2+aA+bB \mid a,b\in\mathbb{R}, a\neq -1\}$.

5p **a)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **b)** Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că ecuaţia $X^2=I_2$ are o infinitate de soluţii în G.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 59** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ -x-y+4z=0 \end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului are determinantul nenul.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită cel puțin două soluții.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: mx+y+1=0$, $d_2: x+3y+2=0$, $d_3: -x-y+4=0$ sunt concurente.

2. Se consideră mulțimea $H=\left\{\begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid m,n\in\mathbb{Z}_5,\ m=\pm\hat{1}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, atunci $B\cdot A=A^{-1}\cdot B$.

5p **b)** Să se arate că H este un grup cu 10 elemente în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor de ordinul 2 din grupul H.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(X)=AX$.

5p **a)** Să se calculeze $f(A)$.

5p **b)** Să se arate că $(f\circ f)(X)=O_2, \forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că $f(X)+f(Y)\neq I_2, \forall X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea $P=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AA^t=I_2\right\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii P.

5p **b)** Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe mulțimea P o structură de grup necomutativ.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in P,\ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $AX=B$, atunci $X\in P$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{M_{a,b} \mid M_{a,b}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $M_{a,b}\cdot M_{c,d}=M_{a+c,b+d}$ $,\forall\, a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze, în funcție de a și b, rangul matricei $M_{a,b}-M_{a,b}^t$ ($M_{a,b}^t$ este transpusa lui $M_{a,b}$).

2. Se consideră un grup $(K,\cdot)$, unde $K=\{e,a,b,c\}$, e este elementul neutru și $a^2=b^2=c^2=e$.

5p **a)** Să se rezolve în grupul K ecuația $x^3=e$.

5p **b)** Să se arate că $ab=c$.

5p **c)** Să se arate că grupul $(K,\cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4,+)$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 62**

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = 2A$.

5p **a)** Să se arate că matricea $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ verifică relația $B^2 = 2B$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a+d \neq 2$, atunci $A = O_2$ sau $A = 2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a+d=2$, atunci $\det(A)=0$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 1$, $g = X^6 - 1$.

5p **a)** Să se arate că un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g este $X^2 - 1$.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor complexe distincte ale ecuației $f(x)g(x)=0$.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimile $P=\left\{S\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid S^t=S\right\}$ şi $Q=\left\{A\in \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)\mid A^t=-A\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\in P$ şi $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\in Q$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A,B\in Q$, atunci $AB\in P$.

5p **c)** Să se arate că $\det\left(X\right)\geq 0$, oricare ar fi $X\in Q$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+2X^2+3X+45\in \mathbb{Z}\left[X\right]$ şi $\hat{f}=X^3+X+\hat{1}\in \mathbb{Z}_2\left[X\right]$.

5p **a)** Să se arate că rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului *f* nu sunt toate reale.

5p **b)** Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y\in \mathbb{Z}\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $Y\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $AY=YA$, atunci $Y\in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in M$ şi $\det\left(X\right)=0$, atunci $X=O_2$.

5p **c)** Să se arate că $A^n\in M, \forall n\in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^5-X^4+3X^3-X^2-2\in \mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine o rădăcină întreagă a polinomului *f*.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+...+x_5^2$, unde $x_1, x_2, ..., x_5$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=b \end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine a,b pentru care sistemul are soluția $(1, 1, 1)$.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ există $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluții cu toate componentele numere întregi.

2. Se consideră mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $X\in A$, $X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor X din mulțimea A care au proprietatea $X^2=O_3$.

1. Fie dreptele $d_1 : x+2y=3,\ d_2 : 3x-4y=-1,\ d_3 : 4x+3y=m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine m astfel încât dreptele să fie concurente.

5p **b)** Să se demonstreze că există o infinitate de valori ale lui m pentru care vârfurile triunghiului determinat de cele trei drepte au toate coordonatele întregi.

5p **c)** Să se calculeze valorile lui m pentru care triunghiul determinat de cele trei drepte are aria 1.

2. Fie polinomul $f = 2X^3 - aX^2 - aX + 2$, cu $a \in \mathbb{R}$ şi cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine a pentru care polinomul are trei rădăcini reale.

5p **c)** Să se determine a astfel încât $|x_1|+|x_2|+|x_3|=3$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 67**

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+my+mz=-2 \end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $\operatorname{rang}(A)\neq 2$, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui $m\neq 1$, pentru care sistemul are soluție cu componente întregi.

2. Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, elemente ale grupului $(S_4,\cdot)$.

5p **a)** Să se verifice că γ este soluție a ecuației $\alpha x=x\beta$.

5p **b)** Să se arate că $\alpha^4=\beta^4$.

5p **c)** Să se determine o soluție a ecuației $x\beta^3=\alpha^3 x$ în S_4.

Varianta 68

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $B = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că $B^t = B$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $B = 2I_2$, atunci $\det(A) \geq 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $x, y \in \mathbb{C}$ şi matricea $xA + yA^t$ este inversabilă, atunci $x + y \neq 0$.

2. Se consideră ecuația $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, şi x_1, x_2, x_3 soluțiile complexe ale acesteia.

5p **a)** Ştiind că $p = 1$ şi $q = 0$, să se determine x_1, x_2, x_3.

5p **b)** Să se determine *p* şi *q* ştiind că $x_1 = 1 + i$.

5p **c)** Să se arate că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^3-A=A^2-I_3$.

5p **b)** Să se arate că $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3, \forall n\in \mathbb{N}, n\geq 3$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in \mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n+3$.

2. Pentru fiecare $n\in \mathbb{N}^*$ se defineşte polinomul $P_n=X^n-1\in \mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului P_4.

5p **b)** Să se descompună polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

5p **c)** Să se descompună polinomul P_6 în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se defineşte matricea $[A, B] = AB - BA$.

5p **a)** Pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, să se calculeze $[A, A^2]$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A, A^*] = O_2$, unde A^* este adjuncta matricei A.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\left[A,[B,C]\right] + \left[B,[C,A]\right] + \left[C,[A,B]\right] = O_2$.

2. Se consideră intervalul $H = (0,1)$.

5p **a)** Să se arate că relația $a \circ b = \dfrac{ab}{ab + (1-a)(1-b)}$ defineşte o lege de compoziție pe H.

5p **b)** Să se arate că funcția $f:(0,+\infty) \to (0,1)$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y > 0$, unde legea "$\circ$" este definită la punctul **a)**.

5p **c)** Ştiind că legea "$\circ$" definită la punctul **a)** este asociativă, să se rezolve în mulțimea $(H, \circ)$ ecuația $x \circ x \circ x = \dfrac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul de ordin $n \geq 2$, $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **b)** Să se verifice că $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $\forall n \geq 4$.

5p **c)** Să se arate că $D_n = n + 1$, $\forall n \geq 2$.

2. Un grup $(G, \cdot)$, cu elementul neutru e, are proprietatea (p) dacă $x^2 = e$, $\forall x \in G$.

5p **a)** Să se verifice că mulțimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziție dată de $(a,b)\cdot(c,d) = (a+c,\ b+d), \forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p).

5p **b)** Să se arate că dacă un grup G are proprietatea (p), atunci $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall x, y \in G$.

5p **c)** Să se arate că orice grup care are proprietatea (p) este comutativ.

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(I_3 + xA^2) = 0$, $x\in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine o matrice $B\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $B^2 = A$.

5p **c)** Să se arate că $\forall C\in M_3(\mathbb{R})$, $\forall x\in \mathbb{R}$, $\det(C+xA)\det(C-xA)\le(\det C)^2$.

2. Se consideră polinomul $p = X^3 - X + m$ cu $m\in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Știind că $m = -6$, să se determine x_1, x_2, x_3.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

5p **c)** Să se determine $m\in \mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

1. Fie matricea $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se asociază fiecărui punct $A(x,y)$ punctul $A_M(x',y')$, unde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

5p **a)** Ştiind că $a=1, b=2, c=3, d=4$ şi că $A(-1,1)$, să se determine coordonatele punctului A_M.

5p **b)** Ştiind că $a=1, b=2, c=2, d=4$, să se arate că toate punctele A_M se află pe dreapta $y=2x$.

5p **c)** Fie A, B, C trei puncte în plan. Dacă se notează cu S şi S_M ariile triunghiurilor ABC, respectiv $A_M B_M C_M$, atunci $S_M = S \cdot |\det M|$.

2. Se consideră mulțimea $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{0} & a & d \\ \hat{0} & \hat{0} & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că mulțimea A este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2 = X$, cu $X \in A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det A$.

5p **b)** Să se verifice relația $A(A^2+6I_3)=O_3$.

5p **c)** Să se arate că $\det(I_3+xA^2)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{Z}$ şi polinomul $p=X^3+aX^2+X+b$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Ştiind că $a=b=1$, să se afle rădăcinile polinomului p.

5p **b)** Să se determine a şi b, ştiind că polinomul p are rădăcina dublă 1.

5p **c)** În cazul $b=1$, să se determine valorile lui a pentru care polinomul p are o rădăcină raţională.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M_x=\frac{x}{3}A+\frac{1}{3x^2}B$, cu $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze produsul AB.

5p **b)** Să se arate că $M_xM_y=M_{xy}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x)\neq 0$.

2. Se consideră polinomul $p=X^4-aX^3-aX+1$, cu $a\in\mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se verifice că $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu X^2-1 pentru nicio valoare a lui a.

5p **c)** Să se arate că dacă $a=\frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi A^* adjuncta sa.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A^*)=(\det A)^2$.

5p **c)** Să se arate că matricea $A-I_3$ are rangul cel mult 1.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a\in G$ se defineşte funcţia $f_a:G\to G,\ f_a(x)=ax, \forall x\in G$.

5p **a)** Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a\in G$.

5p **b)** Să se arate că $f_a\circ f_b=f_{ab},\ \forall a,b\in G$.

5p **c)** Fie $\mathcal{F}(G)=\{f_a:G\to G\mid a\in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operaţia de compunere a funcţiilor formează un grup.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - \ \ y - mz = 1 \\ mx + \ \ y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinatul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

2. Se consideră $\alpha > 0$ un număr real şi mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x * y = 3xy - 6(x + y) + 7\alpha$.

5p **a)** Să se arate că pentru $\alpha = 2$, cuplul $(G_2, *)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se arate că grupurile $(G_2, *)$ şi $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe, prin funcția $f : G_2 \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 3x - 6$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $\alpha \geq 2$, mulțimea G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+mz+t=3 \\ 5x-6y+10z+nt=p \end{cases}$, $m,n,p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0,y_0,z_0,t_0) cu $z_0=t_0=0$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m,n\in\mathbb{R}$, rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m,n,p\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.

2. Fie mulțimea $Q_0=\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z},\ m \text{ și } n \text{ sunt impare}\right\}$ și $G=Q_0\times\mathbb{Z}$. Pe G se definește legea de compoziție $(q_1,k_1)*(q_2,k_2)=(q_1q_2,k_1+k_2),\ \forall q_1,q_2\in Q_0, \forall k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se calculeze $(1,1)*(1,2)*\ldots*(1,10)$.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:G\to\mathbb{Q}^*,\ f((q,k))=q\cdot 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m-1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

5p **c)** Pentru $m = 1$ să se determine soluțiile reale (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14$.

2. Pe mulțimea $G = [0,1)$ se defineşte legea de compoziție $x * y = \{x + y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real *a*.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{2}{3} * \frac{3}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x * x * x = \frac{1}{2}$, $x \in G$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ şi mulțimea $A = \left\{ \sigma^n \mid \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul inversiunilor lui σ.

5p **b)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *A*.

5p **c)** Fie $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma^2 = \sigma^2\tau$. Să se arate că $\tau\sigma = \sigma\tau$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție şi mulțimea $H = \left\{ T \in \mathbb{R} \mid f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $T \in H$, atunci $-T \in H$.

5p **b)** Să se demonstreze că *H* este subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.

5p **c)** Să se determine mulțimea *H* pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$.

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi punctele $A(m,1)$, $B(1-m,2)$, $C(2m+1,\ 2m+1)$. Se consideră matricea

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \\ 2m+1 & 2m+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5p **a)** Să se calculeze $\det(M)$.

5p **b)** Să se arate că punctele *A, B, C* sunt necoliniare, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că aria triunghiului *ABC* este mai mare sau egală cu $\frac{15}{32}$.

2. Fie mulţimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \ a,b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p **a)** Să se dea un exemplu de matrice nenulă din mulţimea *A* care are determinantul $\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că există o matrice nenulă $M \in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali $\begin{cases} x+ay+(b+c)z=0 \\ x+by+(c+a)z=0 \\ x+cy+(a+b)z=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}.$, sistemul admite soluții nenule.

5p **c)** Să se rezolve sistemul, știind că $a\neq b$ şi că $(1,1,1)$ este soluție a sistemului.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2\neq 0\right\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(G,\cdot)$ cu $f(x+iy)=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+(m^2-m-1)y+(m+1)z=2 \\ 2x+(m^2-m-2)y+2(m+1)z=3 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă şi numai dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $m\in\{0,1\}$ sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că dacă $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0-y_0+2009\cdot z_0=1$.

2. Se consideră mulțimile $H=\{a^2 \mid a\in\mathbb{Z}_7\}$ şi $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{Z}_7, a\neq\hat{0} \text{ sau } b\neq\hat{0}\right\}$.

5p **a)** Să se determine elementele mulțimii *H*.

5p **b)** Fie $x,y\in H$ astfel încât $x+y=\hat{0}$. Să se arate că $x=y=\hat{0}$.

5p **c)** Să se arate că *G* este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x-y+z=m \\ nx+y-2z=4 \end{cases}$, unde $m,n\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine *m* şi *n* pentru care sistemul admite soluția $x_0=2,\ y_0=2,\ z_0=1$.

5p **b)** Să se determine $n\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Să se determine *m* şi *n* pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_3\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii *G*.

5p **b)** Să se arate că *G* este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se arate că $X^3=I_3$, oricare ar fi $X\in G$.

1. Fie A matricea coeficienților sistemului $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x-y+mz=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluții nenule.

5p **c)** Să se arate că, dacă $m=0$, atunci expresia $\dfrac{z_0^2+y_0^2+x_0^2}{z_0^2-y_0^2-x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluție nenulă (x_0,y_0,z_0) a sistemului.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-4X^3+6X^2+aX+b$, care are rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4.

5p **a)** Să se determine a şi b ştiind că f are rădăcina i.

5p **b)** Să se calculeze $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2$.

5p **c)** Să se determine valorile reale ale numerelor a şi b ştiind că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + ay + (a+b)z = a+b \\ x + a^2 y + (a^2+b^2)z = a^2+b^2 \\ x + a^3 y + (a^3+b^3)z = a^3+b^3 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice valori rele ale parametrilor *a* şi *b* sistemul are soluție.

2. Se consideră polinomul $f = \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$.

5p **a)** Să se determine gradul polinomului f^2.

5p **b)** Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $g \in \mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2 = \hat{1}$.

SUBIECTUL II (30p) <u>**Varianta 87**</u>

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2 = 3A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(I_3 + A^3\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $AB = BA$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană ale lui B este aceeaşi.

2. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \left\{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\varepsilon^2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **b)** Să se demonstreze că inversul oricărui element nenul din $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ aparține mulțimii $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea $M = \left\{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ 3m+4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matrice A să fie inversabilă.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^{-1}=A^{*}$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ şi polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3$, $f=X^3-X$, $g=X^3+\hat{2}X+\hat{2}$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului *f*.

5p **b)** Să se arate că polinomul *g* este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $h\in\mathbb{Z}_3[X]$ de gradul trei, astfel încât $h(x)=g(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_3$.

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_3 - x_4 = b \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice valori ale lui a şi b, sistemul este compatibil.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluție (x_1, x_2, x_3, x_4) cu proprietatea că x_1, x_2, x_3, x_4 şi $x_1 + x_2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă sistemul are o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $a + b < 1$.

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se calculeze $x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$.

Varianta 90

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie M mulțimea matricelor de ordin 3 cu elemente reale având proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este 0.

5p **a)** Să se arate că, dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din M este neinversabilă.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $A \in M$, atunci $A^2 \in M$.

2. Se consideră inelele $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ şi $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, atunci $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

5p **b)** Să se arate că $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există morfisme de inele de la $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ la $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 91** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 4\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că $A^2=5A$.

5p **b)** Pentru $x=2$ să se calculeze A^{2009}.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\operatorname{rang}\left(A+A^t\right)=1$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=2X^4+2(a-1)X^3+(a^2+3)X^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c, ştiind că $a=b=c$, iar restul împărțirii lui f la $X+1$ este 10.

5p **b)** Ştiind că $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f, să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

5p **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi rădăcinile polinomului f în cazul în care f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 92** http://www.pro-matematica.ro

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid AXA^t=O_2\}$, unde A^t este transpusa matricei *A*.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in G$, atunci $X+Y\in G$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X\in G$, atunci suma elementelor lui *X* este egală cu 0.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in G$ şi $\det X=0$, atunci $X^n\in G$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-6X^3+18X^2-30X+25\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se arate că polinomul f se divide cu X^2-2X+5.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că rădăcinile polinomului f au acelaşi modul.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se determine $\left(A\cdot A^t\right)^{-1}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=A,\ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^{30}-3X^{20}+aX^{10}+3X^5+aX+b\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se arate că restul împărțirii polinomului f la $X+1$ nu depinde de a.

5p **b)** Să se determine a şi b astfel încât restul împărțirii polinomului f la X^2-X să fie X.

5p **c)** Să se determine a şi b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că A este matrice inversabilă.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n & b^n-c^n \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze A^{-1}.

2. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f\left(X^2+3X+1\right)=f^2(X)+3f(X)+1$ şi $f(0)=0$.

5p **a)** Să se determine $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X-5$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f=X$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricea $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 şi restul elementelor egale cu 1.

5p **a)** Să se calculeze $\det(2A_2)$.

5p **b)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A_3 + xI_3) = 0$.

5p **c)** Să se arate că A_4 are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{4}{5}$ şi restul elementelor egale cu $-\frac{1}{5}$.

2. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine a,b,c pentru care $x_1 = 2$ şi $x_2 = 1 + i$.

5p **b)** Să se arate că resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ şi la $(X-2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a,b,c.

5p **c)** Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi a,b,c sunt strict pozitive, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se notează $tr(A)=a+d$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2 - tr(A)\cdot A + (\det A)\cdot I_2 = 0_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $tr(A)=0$, atunci $A^2B=BA^2$, pentru orice matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că dacă $tr(A)\neq 0$, $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $A^2B=BA^2$, atunci $AB=BA$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-6X^3+13X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze suma pătratelor celor 4 rădăcini complexe ale polinomului *f*.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)(X-3)$.

5p **c)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă două rădăcini duble.

1. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $\det\left(A\cdot A^t\right)\geq 0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A\cdot A^t=A^t\cdot A$, atunci $(a-d)(b-c)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\left(A-A^t\right)^{2009}=A-A^t$, atunci $|b-c|\in\{0,1\}$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ ecuația $\hat{2}x=\hat{3}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $p=\hat{2}X^2+\hat{4}\in\mathbb{Z}_7[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{Z}_7\to\mathbb{Z}_7$, $f(x)=\hat{2}x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7,+)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0+y_0+z_0=4$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{Z}^3$.

2. Fie $p\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-4X+p\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X+1$.

5p **b)** Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $p\in\mathbb{R}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(AA^t+xB)$.

5p **a)** Să se calculeze AA^t.

5p **b)** Să se arate că $f(0)\geq 0$.

5p **c)** Să se arate că există $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=mx+n$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră mulţimea de numere complexe $G=\left\{\cos q\pi+i\sin q\pi \mid q\in\mathbb{Q}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in G$.

5p **b)** Să se arate că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulţirea numerelor complexe.

5p **c)** Să se arate că polinomul $f=X^6-1\in\mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în G.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $(I_2+A)^2=I_2+A$.

5p **b)** Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^3=A$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{Z}$ şi polinomul $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)+f(-1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, dacă $f(2)$ şi $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul *f* nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g=X^3-X+3a+1$, $a\in\mathbb{Z}$, nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.