SUBIECTUL III (30p) **Varianta 1**

1. Se consideră numărul real $a>0$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x}-ax$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică la graficul funcţiei f către $-\infty$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei *f*.

5p **c)** Să se determine $a\in(0,\infty)$, ştiind că $f(x)\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă a funcţiei *f*.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă G a funcţiei f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=\dfrac{1}{e}$ şi $x=e$. .

SUBIECTUL III (30p) <u>**Varianta 2**</u>

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $a_1 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $a_n \in (0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat de $b_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcţiei *f*.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeţei delimitate de dreptele $x=0, x=1, Ox$ şi graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x+1)f(x)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 3**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=18x^2-\ln x$.

5p **a)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)\geq a,\ \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_a(x)=\dfrac{1}{|x-a|+3}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, funcția f_a are primitive strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^3 f_2(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f_a(x)dx$.

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția *f* nu are puncte de extrem local.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n=\int_1^2\dfrac{x^n}{x^n+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le 1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL III (30p) <u>**Varianta 5**</u>

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției *f*.

5p **b)** Să se determine punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $9y=2x$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $x>1$, atunci $\ln x\geq\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$.

5p **a)** Să se arate că $f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(x)dx\leq f(k),\forall k\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx, n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 6** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x\cdot\ln x}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=f(x)(1+\ln x),\forall x>0$.

5p **b)** Să se determine valoarea minimă a funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$.

2. Se consideră, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, funcțiile $f_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x}$ şi $g_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$,

$g_n(x)=1-x+x^2-x^3+...-x^{2n-1}+f_n(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\le\int_0^1 f_n(x)dx\le\dfrac{1}{2n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right),n\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p) <u>**Varianta 7**</u>

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $k>0$, $\frac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi are termenii pozitivi.

2. Se consideră funcțiile $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ şi $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$,

$F(x)=a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\,\mathrm{arctg}\,x$, unde a, b, c sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine a, b, c astfel încât F să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se studieze monotonia funcției F, în cazul în care F este primitivă a funcției f.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 8** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\cos x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_0=0,\ x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $0\le x_n\le\frac{\pi}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent la $\frac{\pi}{2}$.

2. Se consideră şirul de numere reale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit de $I_0=\frac{\pi}{2}$ şi $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

5p **c)** Să se arate că $nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 9**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare.

5p **b)** Admitem că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ ecuația $f(x)=n$ are o soluție unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$, unde şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ a fost definit la **b)**.

2. Fie funcțiile $f,g_n:[0,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{1-x},\ g_n(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g_2(x))dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)dx\leq\dfrac{1}{2^n},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+...+\dfrac{1}{n\cdot 2^n}\right)=\ln 2$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 10**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\left(1+x^2\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f' este mărginită.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\leq \frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 11**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+2}e^{|x|}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$ și $g:(0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_x^1\frac{\sin t}{t}dt$.

Se admite cunoscut faptul că $f(x)\geq 0, \forall x\geq 0$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția g este strict descrescătoare.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)>0{,}9$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 12** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

5p **a)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ unde $x_n = f(1)+\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{1}{3}\right)+...+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ este divergent.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(2)$.

5p **b)** Să se demonstreze relația $f(x)\leq\dfrac{1}{x},\ \forall x>1$.

5p **c)** Să se demonstreze relația $f(x+1)=xf(x)-\dfrac{1}{e},\forall x>1$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 13** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică a graficului funcției *f* spre ∞.

5p **b)** Să se arate că $f^2(x)f'(x)=x^2+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

5p **c)** Să se determine derivatele laterale ale funcției f în punctul $x_0=-2$.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $F_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt,\ x>0$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(x), x>0$.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} F_2(x)$.

1. Pentru $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sin^n x$ şi se notează cu x_n abscisa punctului de inflexiune din intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, al graficului funcției f_n.

5p **a)** Să se arate că $f_n''(x)=n(n-1)\sin^{n-2}x-n^2\sin^n x,\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$ şi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\sin x_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}},\ n\geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, F(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Pentru $a=2$, să se determine aria suprafeței plane cuprinsă între graficul functiei *f*, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=2$.

5p **c)** Să se determine a astfel încât $\int_0^2 F(x)dx-\int_{-2}^0 F(x)dx=2$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 15**

1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, se consideră funcția $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n-nx+1$.

5p **a)** Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $[0;1]$ și strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f_n(x)=0,\ x>0$ are exact două rădăcini $a_n\in(0,1)$ și $b_n\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde a_n s-a definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ şi $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $I_0=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $I_{2n}=\frac{1}{2n-1}-I_{2n-2}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right)=I_0$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 16** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este mărginită pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(1-x)^n$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 xf_n(x)dx=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 17** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_1 \in (0,1)$ şi $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{\,5} + 3x_n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $x_n \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2}}{x_n} = \dfrac{9}{16}$.

2. Se consideră o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} x^2 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \le \cos 1$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 18** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_0=2$, $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, are limita 1.

5p **c)** Să se arate că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n=x_0+x_1+x_2+...+x_n-n$, este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\cos x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F\left(x\right)=x\int_0^x f\left(t\right)dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că F este funcție pară.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției F.

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^a f\left(\frac{1}{x}\right)$, unde *a* este un număr real.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 (x+f(x)-2)^2\,dx$.

5p **c)** Știind că funcția f este bijectivă, să se calculeze $\int_{\frac{4}{5}}^{2} f^{-1}(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 20** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2e^x+3x^2-2x+5.$

5p **a)** Să se demonstreze că funcția *f* este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă .

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 (t^3+1)f(t)dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)dt=\int_1^x t^3 f(t)dt,\ \forall x>0.$

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 21**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{n^2+x^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1, axele de coordonate și dreapta $x=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x\left(f_1(x)\right)^2 dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f_n(1)+f_n(2)+f_n(3)+\ldots+f_n(n)\right)=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 22**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $\left|f(x)-f(y)\right|\le|x-y|, \forall x, y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1}dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^0 \frac{x^2-13}{f(x)}dx$.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^{x^2} f(t)e^t dt$.

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, ecuația $f(x)=3+\dfrac{1}{n+1}$ are o unică soluție $x_n\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x)=3+\dfrac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-1)$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x)=3+\dfrac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{1+t}dt$.

5p **a)** Să se arate că $\int_0^a \dfrac{1}{1+t}dt=\ln(1+a),\forall a>-1$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)<\ln(1+x),\forall x>0$.

5p **c)** Să se arate că $f(\pi)>f(2\pi)$.

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției nu are asimptote.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f are primitive pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R},$ să se arate că $0\leq\int_0^x f(t)\,dt<1,\ \forall x>0.$

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 25**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

5p **a)** Să se arate că funcția este convexă pe intervalul $(0,e]$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 3}$, dat de $a_n=\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 5}{5}+...+\frac{\ln n}{n}-f(n)$, este descrescător.

2. Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f şi axele de coordonate.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 26**

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg} x$.

5p **a**) Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b**) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat de $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_1=0$, este convergent.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x$.

5p **a**) Să se arate că funcția $g:[-1,1]\to\mathbb{R}, g(x)=xf(x)$ are primitive, iar acestea sunt crescătoare.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.

5p **c**) Să se arate că $\int_0^1 x f(x)dx\leq\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 27** http://www.pro-matematica.ro

1. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)\arcsin x.$

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2-x}$.

5p **b**) Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.

5p **c**) Să se arate că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$

5p **a**) Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că funcția F este bijectivă.

5p **c**) Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)\,dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F şi $a=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 28**

1. Fie funcția $f:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

5p **b**) Să se determine domeniul de continuitate al funcției f.

5p **c**) Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă .

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2-\sin x}$ şi $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **c**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 29**

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţiile $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... - x^{2n-1} + x^{2n}, g_n(x) = x^{2n+1} + 1$.

5p **a**) Să se verifice că $f_n'(x) = \frac{g_n'(x)}{x+1} - \frac{g_n(x)}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p **b**) Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} f_n'\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **c**) Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c**) Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} I_n$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$.

5p **a**) Să se determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5p **b**) Să se calculeze derivata a doua a funcției *f*.

5p **c**) Să se demonstreze că $f(x)\le 0,\ \forall x\ge 0$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$.

5p **a**) Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c**) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit de $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, este convergent.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|x^2-x|}$.

5p **a**) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

5p **b**) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c**) Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se verifice că $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}x$.

5p **a**) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se demonstreze că $0<f(x)\le\frac{\pi}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se demonstreze că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)+\operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_1^2\frac{f'(x)}{x}dx$.

5p **b**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c**) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

Varianta 33

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p b) Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{2k\sqrt{k}}, \forall k\in\mathbb{N}^*$.

5p c) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x t^n \operatorname{arctg} t\,dt, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că $f_1(x)=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}$, $\forall x\geq 0$.

5p b) Să arate că $f_n(1)\leq\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1}, \forall n\geq 1$.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nf_n(1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b**) Să se arate că $f(x)<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

5p **c**) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x t^n \arcsin t\,dt$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze derivata funcției f_3.

5p **b**) Să se calculeze $f_1\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **c**) Să se determine $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_2(x)$.

Varianta 35

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=x-\ln(e^x+1)$.

5p **a**) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} x^a f(x)=0, \forall a\in\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se determine asimptotele graficului funcției f.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^2(2x-x^2)^n dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_1.

5p **b**) Să se demonstreze că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.

5p **c**) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde descrescător către 0.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 36** http://www.pro-matematica.ro

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3}\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=2,\ a_{n+1}=f(a_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,\sqrt{3})$ și pe $(\sqrt{3},\infty)$.

5p **b**) Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c**) Să se demonstreze că șirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x^2}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F\left(x\right)=\int_1^x f(t)dt$.

5p **a**) Să se determine punctele de inflexiune ale funcției F.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c**) Să se calculeze $\int_0^1 F(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x+3\operatorname{arctg}x$.

5p **a**) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **c**) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^a}$ există, este finită şi nenulă.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ dat de $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_1.

5p **b**) Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

5p **c**) Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\{x\}\left(1-\{x\}\right)$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ nu depinde de numărul real a.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$.

5p **a**) Să se studieze monotonia funcției *f*.

5p **b**) Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **c**) Să se demonstreze că orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea $x_0\in(0,1), x_{n+1}=e^{f(x_n)}$ este convergent.

2. Se consideră şirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{4x+5}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2 .

5p **b**) Să se arate că şirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relația $4I_{n+1}+5I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcțiile $F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_n(x)=\int_0^x t\sin^n t\,dt$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(\pi)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $F_{n+1}(1)<F_n(1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0),\ \ f(x)=\ln(1+x)-x$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b**) Să se arate că funcția f este surjectivă.

5p **c**) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptote.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b**) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(\ln t)\,dt=\dfrac{\pi}{2}$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\operatorname{arctg}x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit de $x_1=1,\ x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

5p **c**) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n=\int_0^1 (x-x^2)^n\,dx,\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se demonstreze că $I_n=\dfrac{n}{4n+2}I_{n-1},\ \ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

5p **b**) Să se arate că funcția f admite exact un punct de extrem local.

5p **c**) Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un număr real oarecare.

2. Fie funcțiile $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_1^{\operatorname{tg}x}\frac{t}{1+t^2}dt$ şi $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=\int_1^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{t(1+t^2)}dt$.

5p **a**) Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

5p **b**) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **c**) Să se arate că $f(x)+g(x)=0,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}},\quad a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a**) Să se calculeze $f'(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $a=2b>0$.

5p **c**) Pentru $a=2$ şi $b=1$, să se determine mulțimea valorilor funcției f.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\int_0^x e^{\arcsin t}\,dt$.

5p **a**) Să se arate că funcția f este strict monotonă.

5p **b**) Să se arate că $f(x)=\int_0^{\arcsin x} e^t\cos t\,dt, \forall x\in[-1,1]$.

5p **c**) Să se determine $f(1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}},\ \ a\in\mathbb{R}.$

5p **a**) Să se calculeze $f'(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b**) Ştiind că $a=0$, să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c**) Să se determine toate numerele reale a astfel încât funcția f să aibă trei puncte de extrem local.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

5p **b**) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\dfrac{|x-1|}{e^x}$.

5p **a**) Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0=1$.

5p **b**) Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ \ f(x)=x^2\sin x$.

5p **a**) Să se arate că există numerele reale $a,\ b,\ c$ astfel încât funcția $F:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$,

$F(x)=\left(ax^2+b\right)\cos x+cx\sin x$ să fie o primitivă a funcției *f*.

5p **b**) Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right)dx$.

5p **c**) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f* şi graficul funcției $g:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$,

$g(x)=\pi x-x^2$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 47**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

5p **b**) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c**) Să se demonstreze că funcția f admite un singur punct de extrem local.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c**) Să se demonstreze că $\int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx\ge\dfrac{9}{10}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b**) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c**) Să se demonstreze că funcția f are două puncte de extrem.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^1 x\,f(x)dx$.

5p **b**) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c**) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{4-3x^2}{x^3}$.

5p **a**) Să se demonstreze că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b**) Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5p **c**) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției $g:[2,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\arccos f(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f:[1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ şi $F:[1,2]\to\mathbb{R},\ F(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

5p **a**) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b**) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c**) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=2$, graficul funcției F şi axa Ox.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

5p **b**) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **c**) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f către $+\infty$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se demonstreze că $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are limita 0.

Varianta 51

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\left(x-f(x)\right)^x$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \ln^2 x+1, & x\geq 1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine numerele reale *a* şi *b* astfel încât funcția F să fie primitiva unei funcții *f*.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{xF(x)}dx$.

5p **c)** Să se arate că, pentru funcția $h:[1,\pi]\to\mathbb{R}$, $h(x)=(F(x)-1)\sin x$, are loc relația $\int_1^{\pi} h(x)h''(x)\,dx\leq 0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este continuă pe $[0,1]$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se arate că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci ecuația $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ și $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficele funcțiilor f și g și de dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ şi un număr real m din intervalul $(-2,\infty)$.

5p **a)** Să se determine punctele de extrem ale funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că ecuația $x^3-3x=m$ are soluție unică în mulțimea $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine primitiva F a funcției f care are proprietatea $F(0)=-1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Să se determine punctul în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu prima bisectoare.

5p **b)** Să se arate că valoarea minimă a funcției f este 1.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{f(x)-1}$ nu este derivabilă în $x_0=0$.

2. Se consideră funcțiile $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_2^x \frac{t^2}{t^2-1}dt$ şi $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_0^{\ln\frac{x^2-1}{3}}\sqrt{3e^t+1}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(3)$.

5p **b)** Să se arate că $g'(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$, $\forall x\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $g(x)=2f(x)$, $\forall x\in(1,\infty)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției *f*.

2. Fie funcția $f:[1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_1^x f(t)dt\le\dfrac{x-1}{6},\forall x\in[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^6}dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+5}{3x+4}$.

5p **a)** Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b)** Să determine limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=f(1)f(2)...f(n)$.

5p **c)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(e^x)$.

2. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e f(x)dx=e$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1=\frac{1}{2}$ şi $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\ge1$ are limită .

5p **b)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} xf(x) & ,x\le 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x>0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine cel mai mare număr real a care are proprietatea $f(x)\ge a+2\ln x, \forall x\in(0,\infty)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ şi F o primitivă a sa.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)+f(x)$ are exact un punct de extrem local.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)<g(x)$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-m, x\in[0,1]\\ x\ln x, x\in(1,2]\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, funcția f este integrabilă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}$.

5p **c)** Pentru $m=1$, să se demonstreze că, pentru orice $t\in(0,2)$ există $a,b\in[0,2]$, $a\neq b$, astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(t)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin x$ şi F o primitivă a lui f.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $c\in(1,3)$ astfel încât $\int_1^3 \dfrac{f(x)}{\sin x}dx=2c^2$.

5p **c)** Să se arate că funcția F nu are limită la $+\infty$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

5p **a)** Să se arate că mulțimea valorilor funcției f este $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln f(x)$, atunci $(f(x)-x)\cdot g'(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x)<x$, pentru orice $x>0$, unde g este funcția definită la punctul **b)**.

2. Fie mulțimea $M=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \middle|\ f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x)\,dx=f(0)=f(1)\right\}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-3x^2+x$ aparține mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că, dacă f este o funcție polinomială de grad trei care aparține lui M, atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $f\in M$, ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este continuă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\sin^2 x)$.

5p **a)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze derivata funcției $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)\,dt$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f_2 este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x)=0$ are exact o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{f_2(x)-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in(-\infty,0]\\ 1+\sin x, & x\in(0,\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi,2\pi]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că , pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx\le 2^n\pi$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

5p **a)** Să arate că $|f(x)|\le|x|$, $\forall x\in[-1,1]$.

5p **b)** Să arate că funcția f este continuă în origine.

5p **c)** Să se arate că funcția f nu este derivabilă în origine.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} axe^x-x, & x\le 0 \\ x\cos x+b, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine a şi b ştiind că funcția f este primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei funcții.

5p **b)** Ştiind că $a=0$ şi $b=0$, să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $b=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^n f(x)dx=-\infty$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-2)$.

5p **b)** Să calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq1}, a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-\ln\frac{n(n+1)}{2}$.

5p **c)** Să se arate că există un punct $c\in(1,2)$ astfel încât $(c-1)f'(c)+f(c)=f(2)$.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\frac{\pi}{4}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\frac{f(x)f''(x)-\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2}dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **b)** Să se arate că $f(x)\geq 2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $f(x)\geq mx+1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $m=2$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^3 x\cos x$ şi F o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

5p **a)** Să arate că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

5p **b)** Să se calculeze aria subgraficului restricției funcției f la intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^\pi f^{2n+1}(x)dx=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\sqrt{\left|1-x^2\right|}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f pe intervalul $(-1,1)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x^{-2}f(x)$ este mărginită.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3],\ f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția f are inversa g.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci are loc inegalitatea $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\alpha} g(x)dx\ge\alpha$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră mulțimea de funcții

$M=\left\{ f:[-1,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{ este de două ori derivabilă şi } f(0)=0,\ f'(0)=1 \right\}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $u:[-1,1]\to\mathbb{R},\ u(x)=e^x\sin x$ aparține mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că , dacă $f\in M$ şi $f(x)\neq 0,\ \forall x\in[-1,1]\setminus\{0\}$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{x}}=e$.

5p **c)** Să demonstreze că, dacă $f\in M$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\dfrac{nf''(0)}{2}$.

2. Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ şi $g:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $g(x)=\ln(1+x)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{3}{n}\right)+\ldots f\left(\dfrac{n}{n}\right)\le n\ln 2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{2x+1}{2x+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să demonstreze că şirul $(x_n)_{n\ge 1}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$ este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este impară.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx\le e-2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în origine.

5p **b)** Să arate că, pentru orice $k\in(0,\infty)$, există $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-f(n)$, este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}$, unde funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate, folosind eventual funcția *f*, că $\int_0^1 \ln(1+x)dx\leq\frac{5}{12}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se defineşte funcția $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{2x}$ şi, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se defineşte funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.

5p **a)** Să se arate că $f_3(x) = 8e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să determine asimptotele graficului funcției f_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_1(a) + f_2(a) + ... + f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$, unde a este un număr real.

2. Fie funcția $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\ln^2 x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)>0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^2 t^x dt$.

5p **a)** Să se verifice că $1+(x+1)F(x)=2^{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -1} F(x)$.

5p **c)** Să se arate că există o funcție continuă $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, astfel încât $F(x)=1+\int_0^x f(y)dy, \forall x\in(-1,\infty)$.

Varianta 72

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=|\sin nx|$ şi numărul $I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Să se arate că $I_n\ge\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi funcția $f:\{-1,1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x^2-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} f(x)^x$.

5p **b)** Să se determine valoarea numărului *a* ştiind că 3 este punct de extrem local al funcției *f*.

5p **c)** Să se determine valoarea numărului *a* ştiind că graficul funcției *f* are exact o asimptotă verticală.

2. Se consideră funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ şi, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, se defineşte funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f_1^{\,2}(x)=2f_2(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\dfrac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[0,\pi]\to[0,\pi]$,

$g(x)=f_1(x)\sin x$ în jurul axei Ox.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\int_1^2\left(\dfrac{t}{x}-e^x\right)^2 dx$ şi numerele $A=\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx$, $B=\int_1^2\dfrac{e^x}{x}dx$.

5p **a)** Să se arate că $f(t)=At^2-2Bt+\dfrac{e^4-e^2}{2}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $f(2B-t)=f(2B+t), \forall t\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\left(\int_1^2\dfrac{e^x}{x}dx\right)^2\le\left(\int_1^2 e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ şi funcţia $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^{\alpha} - \alpha x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcţiei f.

5p **b)** Să se demonstreze că $(1+x)^{\alpha} > 1 + \alpha x, \forall x \in (-1,\infty) \setminus \{0\}, \forall \alpha \in (1,\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $2f(x+y) \le f(2x) + f(2y), \forall x, y \in [0,\infty)$.

2. Fie funcţia $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^3 f^2(x)[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge1}$, dat de $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) - \int_0^n f(x)dx$, este convergent.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 76**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f(x)=0$ are o soluție unică $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xe^x-1}{x-x_0}=f'(x_0)$, unde x_0 este numărul definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq1}$, definit prin $I_n=\int_0^1\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul I_n este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$ (se consideră cunoscut faptul că $\ln(1+t)\leq t$, $\forall t\in(-1,\infty)$.

1. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $xf(x)=e^x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că funcția f este continuă în $x=0$ dacă şi numai dacă $f(0)=1$.

5p **c)** Să se arate că dacă funcția f este continuă în $x=0$, atunci ea este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_1^2((x-1)(2-x))^n\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $2(2n+1)I_n=nI_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\operatorname{arctg} f(x)-\pi)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{3+\cos x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}\int\limits_0^x f(t)dt$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{3x}+2x+1$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots+f(-n)+n^2)$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=1$ şi $a_{n+1}=\int_0^{a_n}\sin\pi x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze a_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 80** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se arate că $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=\sqrt{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

2. Se consideră şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{nx^n}{x^n+1}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=\ln 2-\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că funcția admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x t^3\sqrt{t^2+1}\,dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $f(1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^5}$.

SUBIECTUL III (30p) <u>Varianta 82</u>

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$.

2. Fie funcția $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to(0,\infty)$, $f(x)=\int_0^x\dfrac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$.

5p **a)** Să se arate că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se studieze derivabilitatea funcției *f*.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{1}{\cos^n x+\sin^n x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcției f_4, atunci $F''(x)=\left(f_4(x)\right)^2\sin 4x,\ \forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\, f_1(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\, f_1(x)dx=\frac{\pi-1}{4}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(f(n)-f(n+1)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t}(t^2-3t+2)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)>0$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\ge1}$ definit prin $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n}t\,dt,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent la 0.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}f(2)f(3)...f(n)\right)^{n^2}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1},\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2},\ \forall n\geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x\,dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* este strict crescătoare.

5p **b)** Să se studieze convergența şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=1$ şi $x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x+1)-f(x)\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{3-x}$ şi $g(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{x},\ \forall x\in(0,3)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e (3-x)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 g(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{t\searrow 0}\int_t^1 g(x)dx=+\infty$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-f(x)}{x^3}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=(x-1)f(x)$ admite exact un punct de extrem.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int\limits_0^1 x^n \sin x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{2n}+2n(2n-1)I_{2n-2}=2n\sin 1-\cos 1,\ \forall n\geq 2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $a>0$ se consideră funcția $f_a:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_a(x)=(x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $f_a'(x),\ x>0$.

5p **b)** Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1},\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2},\ \forall n\geq 3$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n+\ln x,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f_1.

5p **b)** Să se demonstreze că funcțiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p **c)** Admitem că ecuația $f_n(x)=2^n$ are soluția unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la 2.

2. Fie $a\in[0,1]$ şi $I_n=\int_0^a \frac{t^n}{t+1}dt,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n+I_{n-1}=\frac{a^n}{n},\ \forall n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției *f* admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Fie funcțiile $F, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\sin^2 x}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xF(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\ln x)$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=e$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este concavă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^{2\pi} xf(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, se consideră funcția $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_t(x) = x^3 + t^2 x$.

5p **a)** Să se calculeze $f_t'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că fiecare funcție f_t este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f_t^{-1}(1)$ este continuă în punctul 0.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)\sqrt{|t|}\, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)$.

5p **b)** Să se arate că f este funcție impară.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x+1) - f(x)}{x^2 \sqrt{x}}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^{n+1}-(n+2)x+n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că graficele funcțiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$, f_n are exact un punct de extrem x_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{n^2}$, unde x_n este definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}, \forall n\geq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 95**

1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x+1)-f(x)-f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că $g(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+1+1^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+2+2^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+3+3^2}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=nI_{n-1}-\frac{1}{e}$, pentru orice $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie mulțimea $A=\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,...,2009\}$ şi funcția $f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+...+\frac{1}{x-2009}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Ştiind că $a\in\mathbb{R}^*$, să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=a$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este convergent.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 97** http://www.pro-matematica.ro

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Să se rezolve inecuația $f(x)<x-\dfrac{x^3}{3},\ x\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x t^4 f(t)dt$ este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, are loc relația $\int_1^a f(x)dx<\dfrac{1}{4}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ se defineşte funcţia $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n - nx - 1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, funcţia f_n este convexă.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ecuaţia $f_n(x) = 0$ are soluţie unică.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, unde x_n este unica soluţie a ecuaţiei $f_n(x) = 0$.

2. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x},\ g(x) = \int_{-x}^{x} f(t) \cos t\, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcţiei g pe intervalul $[0, \pi]$.

5p **c)** Să se calculeze $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n \ln t\,dt,\ \ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1(e)$.

5p **b)** Să se arate că funcțiile f_n sunt descrescătoare pe intervalul $(0,1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+x^3-x^2+x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge 1},\ I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+3x+2}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.