SUBIECTUL II (30p) <u>**Varianta 1**</u>

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3-3x+2=0$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

5p **b)** Să se arate că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$.

5p **c)** Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p **a)** Să se verifice că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $x\circ(-4)$, unde x este număr real.

5p **c)** Știind că operația „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $(-2009)\circ(-2008)\circ\cdots\circ 2008\circ 2009$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=2$, $b=1$ şi $c=-1$, să se calculeze determinantul d.

5p **b)** Să se verifice că $d=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix}=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $x\circ 3=3\circ x=3$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că operația ”$\circ$” este asociativă, să se calculeze $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3-2x=0$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}$.

5p **c)** Să se calculeze determinantul d.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f=X^4+aX^3-28X^2+bX+96$, $g=X^2+2X-24$ şi $h=(X^2+2X-24)(X^2-4)$.

5p **a)** Să se scrie forma algebrică a polinomului h.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f şi h să fie egale.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x+2\cdot 8^x-28\cdot 4^x-8\cdot 2^x+96=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

5p **b)** Să se verifice dacă $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$, oricare ar fi numerele $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze suma $X(1) + X(2) + X(3) + \ldots + X(2009)$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine *x* real, ştiind că $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-\left(x^2-6x+8\right)\cdot I_2$.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=2A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ 2=2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2009$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,2^n)$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se demonstreze că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p **b)** Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

5p **c)** Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n\in\mathbb{N}$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\right\}$, unde matricea $A_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **b)** Ştiind că mulțimea G împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup, să se determine elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{Z}\to G$, $f(x)=A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(G,\cdot)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze matricea B^2, unde $B^2=B\cdot B$.

5p **b)** Să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $C^4=6^4\cdot I_2$, unde $C=B^2+A^{-1}$ şi $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

2. Fie polinoamele $f=X^3+aX^2+X+\hat{1}$ şi $g=X+\hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

5p **b)** Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

5p **c)** Pentru $a=\hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Definim matricele $A=X\cdot Y^t$ şi

$B(a)=aA+I_3$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi Y^t este transpusa matricei Y.

5p **a)** Să se arate că matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&4&-6\\3&6&-9\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **c)** Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=(\hat{3}a+\hat{3}b)X^2+\hat{2}X+\hat{2}a+\hat{3}b$ şi $g=\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}a+\hat{2}b$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât cele două polinoame să fie egale.

5p **b)** Pentru $a=b=\hat{2}$ să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})$.

5p **c)** Pentru $a=b=\hat{2}$ să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele întregi a, b, c, d astfel încât $A+2I_2=O_2$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei $B=A-A^t$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A+A^t=2I_2$, atunci determinantul matricei $A-A^t$ este un număr divizibil cu 4.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$.

5p **a)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x\circ x=x$.

5p **c)** Să se determine două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Se notează $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se arate că $A^2+A^3=O_2$.

5p **c)** Să se calculeze suma $A+2\cdot A^2+\ldots+10\cdot A^{10}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=(X-1)^{10}+(X-2)^{10}$ şi $g=X^2-3X+2$.

5p **a)** Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

5p **b)** Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.

5p **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $U=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ şi $V=\begin{pmatrix}v & 9\\ 1 & v\end{pmatrix}$ cu $v,x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X\cdot V=U$, atunci $x\cdot(v^2-9)=0$.

5p **b)** Să se determine valorile reale ale numărului *v* pentru care determinantul matricei V este nenul.

5p **c)** Să se determine trei soluții distincte ale sistemului de ecuații $\begin{cases}3x+y=0\\ 9x+3y=0\end{cases}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3-1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x\circ(-x)=-1$, oricare ar fi *x* real.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție "$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Să se calculeze $(-4)\circ(-3)\circ\ldots\circ 3\circ 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Se notează cu $X \cdot X = X^2$.

5p **a)** Să se verifice că $A=I_3+B$.

5p **b)** Să se calculeze suma A^2+B^2.

5p **c)** Să se calculeze inversa matricei A^2.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = xy + 7(x+y) + 42$.

5p **a)** Să se calculeze $\sqrt{2} \circ (-\sqrt{2})$.

5p **b)** Să se verifice că $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & a & a^2\end{vmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Să se calculeze determinantul $D(9)$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a)=0$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D\left(3^x\right)=0$.

2. Se consideră mulțimea $M=[k;+\infty)\subset\mathbb{R},\ k\in\mathbb{R}$ şi operația $x*y=xy-k(x+y)+k^2+k$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $2*3=2$.

5p **b)** Pentru $k=2$ să se rezolve în M ecuația $x*x=6$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in M$, rezultă că $x*y\in M$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{de\ n\ ori}$.

5p **a)** Să se calculeze $A^2 + A$.

5p **b)** Ştiind că $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se rezolve ecuația $\det\left(A^n\right) = 2 \cdot 5^n - 125$.

5p **c)** Să se determine transpusa matricei $B = A + A^2 + ... + A^{2009}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Rădăcinile polinomului sunt x_1, x_2, x_3, x_4.

5p **a)** Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, ştiind că polinomul f admite rădăcinile $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.

5p **c)** Pentru $m = 1$ şi $n = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}\left[X\right]$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $AB=BA$.

5p **b)** Să se calculeze A^2+B^2, unde $A^2=A\cdot A$ şi $B^2=B\cdot B$.

5p **c)** Să se arate că $C^4=5^4\cdot I_2$, unde $C=A+B$ şi $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali $f=X^4+aX^3+bX^2-5X+6$ şi $g=X^3+X-2$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

5p **b)** Pentru $a=-3$ şi $b=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x}-3^{2x+1}+3^x-5+6\cdot 3^{-x}=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=m^2-3 \\ 5x-2y+z=-2 \\ (m+1)x+2y+3z=-2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, ştiind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-12$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluția $(1,2,-3)$.

5p **c)** Pentru $m=-1$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-9X^2-X+9$ care are rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f la X^2-1.

5p **b)** Să se verifice că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=9(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-18$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x)=0$.

Varianta 17

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,2n+1),\ n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei A_1A_2.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2.

5p **c)** Să se arate că toate punctele $A_n(n,2n+1),\ n\in\mathbb{N}$ sunt coliniare.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $A(a)\cdot A(b)=A(2ab)$, oricare ar fi numerele reale a şi b.

5p **b)** Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru față de operația de înmulțire a matricelor pe M.

5p **c)** Să se determine simetricul elementului $A(1)\in M$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe mulțimea M.

Varianta 18

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z},\ a^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi respectiv $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimii G.

5p **b)** Să se determine matricea $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}=aI_2+bB$, oricare ar fi $a, b\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G.

2. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $f=X^3+aX^2-5X+14$ şi suma $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **a)** Să se determine numărul rațional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=-2$.

5p **b)** Pentru $a=-4$ să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

5p **c)** Pentru $a=-4$ să se demonstreze egalitatea $S_3+42=4S_2+5S_1$.

Varianta 19 http://www.pro-matematica.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \log_3 9^n\right)$ şi $B_n(-n,2n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B_1 şi B_2.

5p **b)** Să se arate că $A_n = B_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2.

2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 - X - 1$.

5p **a)** Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se arate că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $y^3 = 2y + 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $f(y)$ nu este număr rațional.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n+2,3n-2)$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația dreptei determinate de punctele A_1 şi A_2 .

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1 .

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, punctele A_1, A_2 şi A_n sunt coliniare.

2. Se consideră polinoamele $f=\hat{3}X^5+\hat{3}X^3+\hat{3}X+\hat{4}\in\mathbb{Z}_5[X]$ şi $g=\hat{3}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

5p **c)** Să se determine câtul împărțirii polinomului f la polinomul g.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(I_3+B)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$.

5p **c)** Să se arate că $\left(f(A)\right)^3=I_3+3B+3B^2$, unde $\left(f(A)\right)^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=x*x$.

5p **b)** Să se determine numărul întreg *a* care are proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

5p **a)** Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in G$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\notin G$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice două matrice $A,B\in G$ are loc egalitatea $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din *G* aparține mulțimii *G*.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3+11X^2+7X+m$, $f\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g=X-1$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât $f\left(\sqrt{2}\right)\in\mathbb{Q}$.

5p **c)** Pentru $m=-9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,4)$, $B(a,a)$ şi $C(3,-2)$ unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a = 0$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

5p **b)** Pentru $a = -2$ să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B şi C.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele B, C şi $M(x,-2)$ să fie coliniare, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + (a+3)X^2 + 6X - 4$ care are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul să fie divizibil cu $X - \sqrt{2}$.

5p **c)** Pentru $a = -3$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $(2,1,-1)$ să fie o soluție sistemului.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2-3m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $m=-5$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-(m+1)X^2-3X+3$, $f\in\mathbb{Q}[X]$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=\sqrt{3}$.

5p **c)** Pentru $m=0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

Varianta 25

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ şi matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A(4))$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ să se rezolve sistemul.

2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 - aX - 4$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f .

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2$.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care polinomul f are o rădăcină rațională pozitivă.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.

5p **a)** Să se calculeze A^2.

5p **b)** Să se verifice că $A^2 = aI_2 + bA$.

5p **c)** Ştiind că $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $AX = XA$, să se arate că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = mI_2 + nA$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se determine a ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

5p **b)** Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se verifice că $AB-2B=O_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $A\cdot X\cdot B=O_2$, atunci suma elementelor matricei X este egală cu zero.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_2[X]$, $f=X^2+\hat{1}$ şi $g=X+\hat{1}$ şi mulțimea $H=\left\{a+bX+cX^2 \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $g^2=f$.

5p **b)** Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului $f+g$ la polinomul f.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor mulțimii H.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{aI_2+bV \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $V=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $I_2\in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $A\in M$ şi A este matrice inversabilă, atunci $a\neq 0$.

5p **c)** Ştiind că $A,B\in M$, să se arate că $AB\in M$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=xy-5(x+y)+30$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziție „$*$” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ notăm cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Să se calculeze $I_2 + (I_2)^t$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $m \in \mathbb{R}$ are loc relația $(mA)^t = mA^t$.

5p **c)** Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A + A^t = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $x * x = x$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, sunt distincte două câte două.

5p **a)** Să se rezolve sistemul pentru $a=0$, $b=1$ şi $c=2$.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A)=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că soluția sistemului nu depinde de numerele reale a,b şi c.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=x+y+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziție $"*"$ este asociativă.

5p **b)** Să se determine m astfel încât $e=-6$ să fie elementul neutru al legii $"*"$.

5p **c)** Să se determine m astfel încât $\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*m*\sqrt{3}=3\sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| \ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei $A(1,1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $A,B\in\mathcal{M}$, atunci $A+B\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se arate că $\det\left(I_2-A(0,b)\right)\neq 0$, oricare ar fi $b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Pentru $g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $g=\left(X+\hat{2}\right)^2\left(X+\hat{1}\right)$, să se calculeze $g\left(\hat{0}\right)$.

5p **b)** Dacă $f\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^3+\hat{2}X$, să se arate că $f(x)=\hat{0}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_3$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $h\in\mathbb{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 şi pentru care

$h\left(\hat{0}\right)=h\left(\hat{1}\right)=h\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră punctele $A_n\left(n,n^2\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului $A_0A_1A_2$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $m,n,p\in\mathbb{N}$, distincte două câte două, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este un număr natural.

2. Se consideră polinomul $f=4X^4+4mX^3+\left(m^2+7\right)X^2+4mX+4$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că $x=1$ este rădăcină a polinomului f.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

5p **c)** Pentru $m=-5$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f\left(x\right)=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, să se calculeze AB.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru oricare $X,Y\in\mathcal{M}$, rezultă că $XY\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $U\in\mathcal{M}$ şi $VU=UV$, pentru orice $V\in\mathcal{M}$, atunci există $p\in\mathbb{Z}$ astfel încât $U=\begin{pmatrix}1 & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(X^2-2X+1\right)^2-a^2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Ştiind că $a=0$ să se determine soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$.

5p **b)** Să se verifice că $f=\left(X^2-2X+1+a\right)\left(X^2-2X+1-a\right)$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{R}^*\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Se notează cu X^t transpusa matricei X.

5p **a)** Să se calculeze $A^t\cdot A$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}$, are loc egalitatea $\det\left(X\cdot X^t\right)=(ad-bc)^2$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ cu $\det\left(X\cdot X^t\right)=0$, are loc relaţia $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale, se consideră legea de compoziţie definită prin $x\circ y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Să se arate că legea "$\circ$" este asociativă.

5p **b)** Să se arate că, pentru oricare $x,y\in(1,+\infty)$, rezultă că $x\circ y\in(1,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x\circ a=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definită prin $f(A) = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se calculeze $f(I_2)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(A+B)^t = A^t + B^t$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det A = 1$ şi $f(A) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră ecuația $x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$.

5p **b)** Pentru $a = 1$, să se determine soluțiile reale ale ecuației.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuația admite cel puțin o soluție număr întreg.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ şi matricele $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $B^2 = 3B$, unde $B^2 = B \cdot B$.

5p **b)** Să se arate că $mI_3 + nB \in G$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A \in G$ şi $A^2 = O_3$, atunci $A = O_3$, unde $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^2 = A \cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 12X^2 + 35$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se arate că $f = \left(X^2 - 6\right)^2 - 1$.

5p **b)** Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele a,b şi c astfel încât $A+F=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $a=c=0$ şi $b=-1$ matricea A este inversa matricei F.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $F\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=xy+(1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*(1-x)=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=b \\ x-2y+az=5 \\ x+y+4z=4 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Pentru $a=-1$ şi $b=2$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine numărul real b, ştiind că (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului şi că $x_0+y_0+z_0=4$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^2-12X+35$ şi $g=(X-6)^{2009}+X-6$. Polinomul g are forma algebrică $g=a_{2009}X^{2009}+a_{2008}X^{2008}+...+a_1X+a_0$, cu $a_0,a_1,...,a_{2009}\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(5)+g(5)$.

5p **b)** Să se arate că numărul $a_0+a_1+...+a_{2009}$ este negativ.

5p **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului *g* la polinomul *f*.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $I_2\in\mathcal{M}$.

5p b) Ştiind că $A, B\in\mathcal{M}$, să se arate că $A+B\in\mathcal{M}$.

5p c) Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\geq 0$, oricare ar fi $A, B\in\mathcal{M}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*4=10$.

5p b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*a=a*x=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p c) Ştiind că legea „$*$” este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2009}*\frac{2}{2009}*\ldots*\frac{4018}{2009}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+4y+4z=15 \\ 3x+(a+4)y+5z=22 \\ 3x+2y+(3-a)z=16 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Să se arate că tripletul $(7,1,1)$ nu poate fi soluție a sistemului, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $y_0+z_0=3$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x\perp y=x+y+1$, $x\circ y=ax+by-1$, cu $a,b\in\mathbb{Z}$ şi funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x+2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x\perp(-1)=(-1)\perp x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție „$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Dacă $a=b=1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},\perp)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât soluția sistemului să verifice relația $x=y+z$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f=X^3-2X^2+aX-8$.

5p **a)** Să se determine numărul real *a* astfel încât o rădăcină a polinomului *f* să fie egală cu 2.

5p **b)** Pentru $a=4$ să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului *f* la polinomul $g=X^2-2X+4$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $a \in (2,+\infty)$, atunci *f* nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=2I_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine x real astfel încât $\det\left(A-xI_2\right)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^4\cdot X=X\cdot A^4$, pentru orice $X\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$, unde $A^4=A\cdot A\cdot A\cdot A$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-2b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $3+2\sqrt{2}\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\cdot y\in G,$ pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că orice element din mulţimea G are invers în G în raport cu înmulţirea numerelor reale.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $O_3\in\mathcal{M}$.

5p **b)** Să se demonstreze că produsul oricăror două matrice din $\mathcal{M}$ este o matrice din $\mathcal{M}$.

5p **c)** Știind că $A\in\mathcal{M}$ şi $\det(A)=0$, să se demonstreze că $A^3=O_3$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=c=1$ şi $b=-1$ să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f la X^2+1.

5p **b)** Să se determine numerele *a, b, c* ştiind că restul împărțirii polinomului f la X^2+1 este X, iar restul împărțirii polinomului f la $X-1$ este -1.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

Varianta 44

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Ştiind că $ad = 4$ şi $bc = 3$, să se calculeze $\det(A)$

5p **b)** Să se calculeze $A \cdot A^t$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A) = 0$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

5p **a)** Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f ştiind că $a = -1$, $b = -2$ şi $c = 0$.

5p **c)** Ştiind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.

5p **a)** Să se calculeze A^2.

5p **b)** Să se verifice că $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I_2$.

5p **c)** Ştiind că $a+d \neq 0$ şi $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2M = MA^2$, să se demonstreze că $AM = MA$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Pentru $a = 1$ şi $b = 0$ să se determine x_1, x_2, x_3.

5p **b)** Ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, să se arate că $a = 1$.

5p **c)** Ştiind că $f = (X - x_1^2)(X - x_2^2)(X - x_3^2)$, să se determine numerele reale a şi b.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 46**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulțimea

$G=\left\{M(x,y)\,\middle|\,M(x,y)=xI_2+yA,\ x,y\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine inversa matricei $M(1,1)$.

5p **c)** Să se determine matricele inversabile din mulțimea G.

2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+pX^2+1$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3 şi $p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(-p)$.

5p **b)** Să se determine $p\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X-1$.

5p **c)** Să se calculeze în funcție de $p\in\mathbb{R}$ suma $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine matricea A^2, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3$, unde $A^3 = A^2 \cdot A$.

5p **c)** Să se determine numerele reale m, n, p astfel încât $A^{-1} = mA^2 + nA + pI_3$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

2. Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3 cu proprietatea că:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2; \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2.$$

5p **a)** Să se calculeze $x_1x_2x_3$.

5p **b)** Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$, ştiind că ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are soluţiile x_1, x_2, x_3.

5p **c)** Să se descompună polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 4$ în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 48**

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Se notează $X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot ... \cdot X}_{de\ n\ ori}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze X^2.

5p **b)** Să se determine inversa matricei X.

5p **c)** Să se determine numărul real r astfel încât $X^3 = 3X^2 + rX + I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y}$.

5p **a)** Să se calculeze $2009 \circ (-2009)$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x^2 = 64$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$, atunci $x = -y$.

SUBIECTUL II (30p) <u>**Varianta 49**</u>

1. Se consideră matricele $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det\left(M_1 + M_2\right)$.

5p **b)** Să se calculeze M_a^2, unde $M_a^2 = M_a \cdot M_a$.

5p **c)** Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ pentru care $M_a \cdot X = X \cdot M_a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

5p **a)** Să se calculeze $x * 0$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Știind că $x_0 \in \mathbb{Q}$ și $x_n = x_0 * x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că $x_3 \notin \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in\mathcal{M}$.

5p **b)** Ştiind că $A,B\in\mathcal{M}$, să se arate că $A+B\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\det\left(AB-BA\right)\le 0$, oricare ar fi $A, B\in\mathcal{M}$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{ f\in\mathbb{Z}_3\left[X\right] \middle| \; f=X^2+aX+b\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\hat{1}\right)$ pentru $a=b=\hat{1}$.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_3$ pentru care $f\left(\hat{0}\right)=f\left(\hat{1}\right)=\hat{1}$.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $H(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde $a>0$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(H(a)), \forall a>0.$

5p **b)** Să se arate că $H(a)\cdot H(b)=H(a\cdot b),\ \forall a,b>0.$

5p **c)** Să se calculeze determinantul matricei $H(1)+H(2)+H(3)+\ldots+H(2009)$.

2. Pe mulțimea $G=(2,\infty)$ se consideră operația $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\ \forall x,y\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ y\in G,$ pentru $\forall x,y\in G.$

5p **c)** Să se arate că toate elementele mulțimii G sunt simetrizabile, în raport cu legea $"\circ"$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=3A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A^{10}\right)$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $B=A+I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră operația $x\circ y=x^{3\ln y}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x\circ e=8$, unde e este baza logaritmului natural.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că operația „$\circ$” este asociativă pe mulțimea G.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,n+2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Să se demonstreze că punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p **c)** Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural n.

2. În inelul $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X - 5$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care restul împărțirii polinomului f la $X-a$ este -5.

5p **c)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

5p **a)** Să se arate că pentru orice m număr real tripletul $(0;3;1)$ este soluție a sistemului.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluție unică.

5p **c)** Pentru $m \neq 3$ să se rezolve sistemul.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x*5^x=11$.

5p **c)** Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea $"*"$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Se notează $A^n = \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $A+A^2=2A$.

5p **b)** Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X+A)=2$.

5p **c)** Știind că $A^n = A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A+2A^2+\ldots+nA^n=\dfrac{n(n+1)}{2}A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+1$, $f\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

Se notează $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine numărul real m astfel încât $x_1=2$.

5p **b)** Să se arate că $S_3+S_2+mS_1+3=0$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice număr par $m\in\mathbb{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raționale.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3=7A$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-6I_2$ şi $A^2=A\cdot A$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$ şi $g=X^3+X^2+X+1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $f=X\cdot g+1$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g.

5p **c)** Să se calculeze $f(a)$, ştiind că a este o rădăcină a polinomului g.

SUBIECTUL II (30p)

1. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$.

5p **b)** Să se arate că $\left(A(x)\right)^2 = A\left((x+1)^2-1\right)$, pentru orice x real, unde $\left(A(x)\right)^2=\left(A(x)\right)\cdot\left(A(x)\right)$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $A(1)$.

2. Fie mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{3} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă 0 şi 1 aparțin mulțimii G.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in G$ avem $x\cdot y\in G$.

5p **c)** Să se arate că dacă $x\in G$, atunci $\frac{1}{x}\in G$.

Varianta 58

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x-5y+4z=0 \\ -3x+y+z=-1 \\ 2x-z=a \end{cases}$, cu $a\in\mathbb{Z}$. Se notează cu A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Pentru $a=1$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural a pentru care soluția sistemului este formată din trei numere naturale.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+1$.

5p **a)** Să se calculeze $2008\circ 2009$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x\circ x^2\leq 3$.

5p **c)** Fie mulțimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}^*\,\middle|\, n\geq 2 \text{ și } C_n^0\circ C_n^1\circ C_n^2=n+6\right\}$. Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se calculeze A^2 ştiind că $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se calculeze inversa matricei I_3+A.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-pX^2+qX-r$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)-f(1)$.

5p **b)** Să se calculeze expresia $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ în funcție de p,q,r.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g=X^3+X^2+X-3$ nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A)=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\, XA=AX\right\}$.

5p **a)** Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-2I_2$ şi $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea $G=(-1,1)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

5p **a)** Să se rezolve în G ecuaţia $x*x=\dfrac{4}{5}$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $x*y=\dfrac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$ rezultă că $x*y\in G$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{X(a) \mid a\in\mathbb{R} \text{ şi } X(a)=I_2+aA\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă I_2 aparţine mulţimii *G*.

5p **b)** Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+5ab)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că pentru $a\neq -\frac{1}{5}$ inversa matricei $X(a)$ este matricea $X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=\hat{3}X^3+\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{2}$ şi $g=X^2+\hat{2}X$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{1})\cdot g(\hat{0})$.

5p **b)** Să se verifice că $f=(\hat{3}X+\hat{3})\cdot g+\hat{2}X+\hat{2}$.

5p **c)** Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

Varianta 62

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x-y+mz=0 \\ 4x+y+5z=0 \end{cases}$, cu m parametru real şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A pentru $m=1$.

5p **b)** Să se determine parametrul real m ştiind că determinantul matricei sistemului este nul.

5p **c)** Pentru $m \neq -1$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ şi $g = X^2 - 2X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze diferența $S - S'$, unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ şi $S' = y_1 + y_2$.

5p **b)** Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f la g.

5p **c)** Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=A-I_3$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se calculeze A^2-B^2, unde $A^2=A\cdot A$ şi $B^2=B\cdot B$.

5p **c)** Să se arate că inversa matricei B este $B^{-1}=\frac{1}{9}A-I_3$.

2. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie $x\circ y=xy+3x+3y+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p **c)** Să se determine $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ astfel încât $C_n^2\circ C_n^2=13$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B=I_2+A$. Se notează

$X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=0_2$.

5p **b)** Să se calculeze inversa matricei B.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $B^3-B^2=xA$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-2X^2+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g=X^2-1$.

5p **b)** Să se calculeze produsul $S\cdot P$ unde $S=x_1+x_2+x_3+x_4$ şi $P=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$.

5p **c)** Să se calculeze suma $T=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $AB: x+2y-4=0$ şi $BC: 3x+y-2=0$.

5p **a)** Să se determine coordonatele punctului B.

5p **b)** Pentru $A(4,0), B(0,2), C(1,-1)$ să se scrie ecuația medianei triunghiului ABC, duse din vârful C.

5p **c)** Pentru $A(4,0), B(0,2), C(1,-1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

2. Se consideră $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.

5p **a)** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ suma $S=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}$.

5p **b)** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ produsul elementelor inversabile ale inelului.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemul $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det\left(A^2\right)$, ştiind că $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$ ştiind că $A\cdot B=I_2$.

5p **c)** Ştiind că $A\cdot B=I_2$ să se calculeze $S=(B^{-1}-A)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi definim legile de compoziție $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=xy-3\left(x+y\right)+12$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=12$.

5p **b)** Să se arate că $1\circ\left(2*3\right)=\left(1\circ 2\right)*\left(1\circ 3\right)$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases}\left(x-3\right)*y=2\\ \left(x-y\right)\circ 4=10\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

Varianta 67

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+2y=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$ cu $a\in\mathbb{R}$ şi $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se notează $A^2=A\cdot A$.

5p **a)** Pentru $a=-1$ să se rezolve sistemul.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=O_2$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că matricea A verifică egalitatea $A^2=9I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziție $x\circ y=x+y+11$.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{de\ 6\ ori\ x}=1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(\mathbb{Z},\circ)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ cu $x\in\mathbb{R}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A^2=A\cdot A$.

5p **a)** Să se determine numărul real *x* pentru care $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$.

5p **c)** Să se determine numărul real *x* pentru care $A^2=2A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ 2=2$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei

$$E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2008\circ 2009.$$

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cu $x,y\in\mathbb{R}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A)=0$.

5p **b)** Pentru $a=3$ să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a=3$ să se rezolve ecuația matricială $A\cdot X=B$.

2. Pe mulțimea $G=(-1,1)$ se consideră legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

5p **a)** Să se calculeze $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Fie funcția $f:(-1,1)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$. Să se verifice că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze matricea A^2.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A^2\right)$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^2\neq I_3$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$ şi $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Să se verifice că $(x*2)-(3\circ x)=-1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Ştiind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$*$” şi e_2 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$\circ$”, să se calculeze $(e_1*e_2)+(e_1\circ e_2)$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$, oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

Varianta 71

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ cu x şi y numere reale. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(0,3)$, $O(0,0)$ şi $C_n(n+1, 2-n)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei M.

5p b) Să se arate că punctele A, B şi C_2 sunt coliniare.

5p c) Să se determine numărul natural nenul n astfel încât aria triunghiului AOC_n să fie minimă.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \perp y = (x-3)(y-3)+3$.

5p a) Să se arate că $(x+3) \perp \left(\frac{1}{x}+3\right) = 4$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.

5p b) Să se arate că legea „$\perp$” are elementul neutru $e = 4$.

5p c) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\perp$”.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-3y+4z=-5 \\ x+2y+\alpha z=0 \\ 5x-4y+7z=\beta \end{cases}$ unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, A este matricea sistemului şi

$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 5 & -4 & 7 & \beta \end{pmatrix}$. Notăm cu $S(\alpha,\beta)$ suma elementelor matricei *B*.

5p **a)** Să se calculeze $S(0,0)$.

5p **b)** Să se determine numerele reale α şi β astfel încât determinantul matricei A să fie nul şi $S(\alpha,\beta)=-2$.

5p **c)** Pentru $\alpha=0$ şi $\beta=0$ să se rezolve sistemul.

2. În mulțimea polinoamelor $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f=X^3+mX^2+nX+6$ şi $g(X)=X^2-X-2$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2-x-2=0$.

5p **b)** Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să se divide cu polinomul g.

5p **c)** Pentru $m=-4$ şi $n=1$ să se calculeze produsul $P=f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2008)\cdot f(2009)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ cu $a,b,c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Ştiind că $a=-1,\ b=0$ şi $c=1$, să se calculeze determinantul Δ.

5p **b)** Să se arate că $\Delta = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right),\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x * y = x + y + 3,\ x \circ y = ax + y - 3$, cu $a \in \mathbb{Z}$ şi funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x + 6$.

5p **a)** Să se calculeze $(1*2)*(0 \circ 3)$.

5p **b)** Să se determine numărul întreg *a* pentru care legea de compoziție "$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Pentru $a=1$ să se arate că funcția *f* este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},*)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2 = A\cdot A$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $XA=AX$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $Y^2=A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

5p **a)** Să se calculeze numărul elementelor inversabile în raport cu înmulțirea din inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

5p **b)** Se consideră S suma soluțiilor ecuației $\hat{2}x+\hat{1}=\hat{5}$ și P produsul soluțiilor ecuației $x^2=x$, unde $x\in\mathbb{Z}_6$. Să se calculeze $S+P$.

5p **c)** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, acesta să fie soluție a ecuației $x^3=\hat{0}$.

Varianta 75

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & -4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(A+I_2)^{-1}=A-I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se determine numerele reale x pentru care $\det\left(x^2A\right)=x^2\det(A)$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy+3x+ay+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$” să fie comutativă.

5p **b)** Să se arate că pentru $a=3$ şi $b=6$ legea „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $(-3)*x=-3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ x+4y-2z=16 \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât matricea A să fie inversabilă.

5p **b)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul pentru $a = 1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z,$ oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ(-4)\circ y=-4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1\circ(-2)\circ3\circ(-4)\circ5\circ(-6)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1), B(1,2)$ şi $C_n(n,-n)$, cu $n \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația dreptei C_4C_2.

5p **b)** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}^*$ punctele O, C_n, C_{n+1}, sunt coliniare.

5p **c)** Să se calculeze aria triunghiului ABC_3.

2. Se consideră matricele $A_x = \begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{R}$ şi mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$

5p **c)** Să se arate că $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor .

Varianta 78

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea matricelor $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{N}\right\}$.

5p **a)** Pentru $A,B\in G,$ să se demonstreze că $A+B\in G$.

5p **b)** Să se arate că matricea $C\in G$, obținută pentru $a=5$ și $b=3$, verifică relația $C^2=10C-16I_2$, unde $C^2=C\cdot C$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se determine o matrice $D\in G$ care are proprietatea că $\det(D)=2009$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X],\ f(X)=(X+1)^{2009}-(X-1)^{2009}$ care are forma algebrică

$$f=a_{2008}X^{2008}+a_{2007}X^{2007}+...+a_1X+a_0 .$$

5p **a)** Să se determine a_0.

5p **b)** Să se arate că $f(1)+f(-1)$ este număr întreg par.

5p **c)** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinomului f .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $A\cdot B$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația matricială $A\cdot X=B$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-4A+5I_2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=x+y-14$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=2$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea "$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Să se demonstreze că $(\mathbb{R},\circ)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

5p **a)** Să se calculeze valoarea determinantului pentru $a=-1$.

5p **b)** Să se demonstreze că $D(a)=-(a-1)^2(a+2)$, pentru orice a număr real.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a)=-4$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = xy-10(x+y)+110$.

5p **a)** Să se verifice că $x \circ y=(x-10)(y-10)+10$, oricare ar fi $x,y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $C_{10}^1 \circ C_{20}^1$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ (x-1)=10$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A(k)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x_k & x_k^2 \\ -2 & x_k^2 & x_k \end{pmatrix}$, cu $k\in\{0,1,2\}$. $x_0=1$ și x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației

$x^2+x-2=0,\ x_1<x_2.$

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei $A(0)$.

5p **b)** Să se determine matricea $A(1)+A(2)$.

5p **c)** Să se calculeze suma elementelor matricei $A(k)$, pentru fiecare $k\in\{0,1,2\}$.

2. Pe mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră operația $x\circ y=x^{2\ln y}$.

5p **a)** Să se calculeze $3\circ e$, unde e este baza logaritmului natural.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru orice $x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că operația "$\circ$" este asociativă pe mulțimea G.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a;b;x)=\begin{vmatrix}1 & x & ab\\ 1 & a & bx\\ 1 & b & ax\end{vmatrix}$, unde a,b şi x sunt numere reale.

5p **a)** Să se calculeze $D(1;1;0)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $D(a;a;x)$ nu depinde de numărul real x.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $D(a;b;x)=0$, unde a şi b sunt numere reale pozitive.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-3X+a$ şi $g(x)=X^2-3X+2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=2$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=g(x)$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f, ştiind că are o rădăcină dublă pozitivă.

5p **c)** Pentru $a=2$ să se rezolve ecuația $e^{f(x)}=g\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 2x^2+2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f(1)$.

5p **b)** Să se arate că $f(1)\cdot f(-1)=I_3$ unde $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\ \hat{1},\ \hat{2},\ \hat{3},\ \hat{4},\ \hat{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$, pentru $x\in\mathbb{Z}_6$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\\ x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$, unde $x, y\in\mathbb{Z}_6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $A=B+I_3$.

5p **b)** Să se demonstreze că matricea A este inversabilă şi să se determine A^{-1}.

5p **c)** Să se determine numărul real a astfel încât $\det\left(X\left(a\right)\right)=\left(2a-1\right)^3$, unde $X\left(a\right)=I_3+aA$.

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x*y=\left(x-1\right)\left(y-1\right)+1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

5p **c)** Să se calculeze $\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*\ldots*\frac{\sqrt{2009}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1 \\ x+ay+(a-3)z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $\det(A)=a^2-6a+5$.

5p b) Să se rezolve ecuația $\det(A)=0$.

5p c) Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x*y=xy-6x-6y+42$.

5p a) Să se arate că $x*y=(x-6)(y-6)+6$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x*x=x$.

5p c) Să se calculeze $1*2*3*...*2009$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| X^2=-I_2\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se verifice că $A\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}\left(X+I_2\right)\right)^2=\frac{1}{2}X$, oricare ar fi $X\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinul al doilea cu elemente numere reale pentru care avem $A\cdot X=X\cdot A$ este de forma $X=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $c=501$ să se demonstreze că $f(1)+f(-1)=1004$.

5p **b)** Pentru $a=-2$, $b=2$ şi $c=-1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienților a, b, c astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $g=X^3-X$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\, X^2=X\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se verifice că $A\in G$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A^3-2A^2+A\right)$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\left(2X-I_2\right)^2=I_2$, oricare ar fi $X\in G$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{2009}(x+y)+2009+\sqrt{2009}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=\left(x-\sqrt{2009}\right)\left(y-\sqrt{2009}\right)+\sqrt{2009}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziție „$*$” este asociativă, să se calculeze
$\left(-\sqrt{2009}\right)*\left(-\sqrt{2008}\right)*\ldots*0*\ldots*\left(\sqrt{2008}\right)*\left(\sqrt{2009}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+ay+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$, unde a este număr real şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=0$ să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x*y=px+y+2$, cu $p\in\mathbb{Z}$, $x\circ y=x+y-2$ şi funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=3x+q$, cu $q\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se determine $p\in\mathbb{Z}$ astfel încât legea de compoziție "$*$" să fie comutativă.

5p **b)** Pentru $p=1$ să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $(x*x)\circ(x*x)=x^2+2$.

5p **c)** Pentru $p=1$ să se determine numărul întreg q astfel încât funcția f să fie morfism între grupurile $(\mathbb{Z},*)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&7&5\end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Pentru $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează $X^3 = X \cdot X \cdot X$.

5p **a)** Să se determine A^{-1}.

5p **b)** Să se rezolve ecuația matricială $A^3 \cdot X = I_3$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se calculeze $(B-A)^3$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 7x + 7y + 14$.

5p **a)** Să se determine elementul neutru al legii $"*"$.

5p **b)** Să se rezolve mulțimea numerelor întregi inecuația $x * x \leq -1$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea de compoziție $"*"$ este asociativă.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2y+4z=0 \\ a^2x+4y+16z=0 \end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor reale ale numărului a pentru care $\det(A)\neq 0$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2;4\}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real c ştiind că $f(1)+f(-1)=2009$.

5p **b)** Să se determine numerele reale a,b,c ştiind că $f(0)=f(1)=-2$ şi că una dintre rădăcinile polinomului este $x=2$.

5p **c)** Pentru $a=-2$, $b=1$ şi $c=-2$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$. Pentru $a\in\mathbb{R}$ fixat, definim matricea $B=aA+I_3$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $2B-B^2=I_3$.

5p **c)** Să se determine B^{-1}.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine numărul real x pentru care $\left(x^2-5\right)\circ 6=-1$.

5p **c)** Să se determine două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$G=\left\{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^2X = XA^2$, oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p **c)** Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci matricea $aI_3 + bA \in G$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(1+X+X^2\right)^{1004}+X^{2009}$, cu forma algebrică

$f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_{2009}X^{2009}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

5p **b)** Să se arate că $a_0+a_1+a_2+...+a_{2009}$ este un număr întreg par.

5p **c)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2-1.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3=2^3\begin{pmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{pmatrix}$, unde $A^3=A^2\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-8A+12I_2=O_2$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Z}_6[X]$, $f=X^3+\left(\hat{2}a+\hat{1}\right)X+a+\hat{4}$

5p **a)** Să se demonstreze că $b^3=b$, oricare ar fi $b\in\mathbb{Z}_6$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_6$, ştiind că $f\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$.

5p **c)** Pentru $a=\hat{2}$ să se rezolve ecuaţia $f(x)=\hat{0}$, $x\in\mathbb{Z}_6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, x real şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A_x^2 = A_x \cdot A_x$.

5p **a)** Să se determine valorile reale ale numărului x pentru care $\det\left(A_x\right) = 0$.

5p **b)** Sa se determine numărul real x astfel încât $A_x^2 = I_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A_x^2 = 2xA_x + (1 - x^2) \cdot I_2$.

2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_3$, ştiind că polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + aX + b$ are rădăcinile $\hat{1}$ şi $\hat{2}$.

5p **b)** Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$ la polinomul $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = X + \hat{1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \left(a^3 + \hat{2}a\right)X^2 + \hat{2}aX + \hat{1}$, atunci $f\left(\hat{1}\right) = \hat{2}a + \hat{1}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $C=A+B$.

Se notează cu $X^2 = X \cdot X$

5p **a)** Să se efectueze produsul $A \cdot B$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A) \cdot \det(B)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^2 - B^2 = 6(A+B)$.

2. Pe mulțimea mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ şi $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

5p **b)** Să se determine simetricul elementului $x = -3$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

5p **c)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 * y^2 = 7 \\ x^2 \circ y^2 = 16 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II (30p)

5p **1.** **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{2009}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2009}+1 \end{vmatrix}$.

5p **b)** Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-4x+2=0$.

5p **c)** Fie matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3+A^2+A=O_3$, unde $A^2=A\cdot A$ şi $A^3=A^2\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$..

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=36$.

5p **c)** Ştiind că operația „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \left\{ X^n \;\middle|\; n \in \{1,2,3\} \right\}$, unde

$X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \ldots \cdot X}_{de\ n\ ori}, n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se verifice că $X^3 = I_3$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(I_3 + X + X^2\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $Y \in G$, atunci $Y^{-1} \in G$.

2. Se consideră mulţimea $G = \left\{ a + b\sqrt{3} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $2 + \sqrt{3} \in G$.

5p **b)** Să se arate că, în raport cu înmulţirea numerelor reale, orice element din mulţimea *G* are invers în *G*.

5p **c)** Să se demonstreze că $x \cdot y \in G$, pentru orice $x, y \in G$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $X^2 = X \cdot X$.

5p **a)** Să se calculeze AB.

5p **b)** Să se demonstreze că $(A+B)^2=(A-B)^2=A^2+B^2$.

5p **c)** Să se calculeze inversa matricei $(A-B)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x*y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine numerele reale pentru care $(x^2-2)*5=-1$.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziție este asociativă, să se calculeze
$(-2009)*(-2008)*\ldots*(-1)*0*1*\ldots*2008*2009$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ cu $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real x astfel încât $A \cdot B = B \cdot A$.

5p **b)** Să se verifice că $A^2 = 4(A - I_2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p **c)** Să se determine numărul real a astfel încât $A^3 - aA^2 + 4A = O_2$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x \circ y = x + y + 3$ și $x * y = xy - 3(x + y) + 12$.

5p **a)** Să se verifice că $x * y = (x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(x \circ (x+1)) + (x * (x+1)) = 11$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x \circ (y-1) = 0 \\ (x+1) * y = x * (y+1) \end{cases}$, cu $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=8A$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det X(a)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+8ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(1+X+X^3\right)^{670}-X^{2010}\in\mathbb{Z}[X]$ cu forma algebrică

$f=a_{2009}X^{2009}+...+a_1X+a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)+f(-1)$.

5p **b)** Să se arate că suma $a_0+a_1+a_2+...+a_{2009}$ este un număr par.

5p **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la X^2-1.