SUBIECTUL III (30p) <u>**Varianta 1**</u>

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției *f*.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\le -4$ pentru orice $x<-1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+e^x, & x\le 0 \\ \sqrt{x}+1, & x>0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{0} x\,f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox* a graficului funcției $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

<u>**Varianta 2**</u>

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-e^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+...+g(2009)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)-f''(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$ şi $F(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Să se verifice că funcția *F* este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției *f*, axa *Ox* şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^x \dfrac{f(t)f''(t)-\left(f'(t)\right)^2}{f^2(t)}dt=\dfrac{x+1}{x}-2$, pentru orice $x>1$.

Varianta 3

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}}\le 5^{\sqrt{3}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e\cdot e^{x}, & x\le -1\\ 2+x, & x>-1\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, $x\in[0,2]$.

5p **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{x f(x)}{e}dx$.

Varianta 4

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că *f* este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi crescătoare pe $[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^3-3x^2-1$.

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$.

5p **b)** Să se determine numărul real $a>1$ astfel încât $\displaystyle\int_1^a\left(g(x)-x^3\right)\cdot e^{x}dx=6e^{a}$.

5p **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1\left(3x^2+3\right)\cdot g^{2009}(x)dx$.

Varianta 5

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2009}-2009(x-1)-1$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $[0;+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **b)** Folosind faptul că $x^2+e^{-x^2}\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_0^1 e^{-x^2}dx\geq\frac{2}{3}$.

5p **c)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+f(-x)$.

Varianta 6

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x\geq 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 2$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x+1$.

5p **a)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=e+\frac{1}{3}$.

Varianta 7

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int\limits_1^e f'(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul real $a\in(1,e^2)$ astfel încât aria suprafeței plane, determinate de graficul funcției *f*, axa *Ox*, dreptele de ecuații $x=a$ şi $x=e^2$, să fie egală cu $\ln\dfrac{3}{2}$.

Varianta 8

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\setminus\{e\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

5p **b)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$, oricare ar fi $x\in(0;+\infty)\setminus\{e\}$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ și $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f+g$.

5p **b)** Să se arate că $\int\limits_1^2 (f^2(x)+g^2(x))\,dx=\dfrac{e^4-e^2+1}{2}$.

5p **c)** Folosind eventual faptul că $2ab\le a^2+b^2$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int\limits_1^2 e^x\cdot\dfrac{1}{x}\,dx\le\dfrac{e^4-e^2+1}{4}$.

Varianta 9

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x(ax^2+bx+c),$ unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1, b=c=0$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se verifice că $f'(0)-f(0)=b$.

5p **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(0)=0,\ f'(0)=1$ și $f''(0)=4$.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_0^1 \frac{x^n+1}{x+1}\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Folosind, eventual, faptul că $x^2\le x$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se demonstreze că $I_2\le I_1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}+2\ln 2,$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 10

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\ge 1\\ -x^2+x, & x<1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(0)+f'(2)$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe $(-\infty;1)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ și $g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că funcția g este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x)g'(x)dx=\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Varianta 11

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{(x+1)^3}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 f'(x)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e \left(f(x)-\frac{\ln x}{x}\right) dx$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_1^e f(x)\, dx=\frac{e^2}{2}$.

5p **c)** Să se arate că şirul care are termenul general $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-x\right) dx,\ n\geq 1$ este o progresie aritmetică cu rația 1.

Varianta 12

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq \ln\frac{e^2}{4}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f_m:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=m^2x^2+(m^2-m+1)x+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int f_1(x)\, dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x)\, dx$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x)\, dx=\frac{3}{2}$.

Varianta 13

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x>-1$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră $I_n=\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln^n x}{x}dx$.

5p **a)** Să se verifice că $I_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze I_1.

5p **c)** Folosind, eventual, faptul că $1\leq\ln x\leq 2$ oricare ar fi $x\in\left[e,e^2\right]$, să se demonstreze că $1\leq\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}\leq 2^n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Varianta 14

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(e)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $x^e\leq e^x$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[-4,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^4 f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Să se verifice că $\displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{x}{f(x)}dx=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $0\leq\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx\leq 8$, oricare ar fi $m\in[0,2]$.

Varianta 15

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{-x} - 1$ şi $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să determine $f_1(x), x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcției f_0.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_2(x)+x-1}{x^2}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = e - 1$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = xe^{-x} f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+1} \cdot f(x) dx$.

Varianta 16

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1; \dfrac{1}{e} - 1\right)$, punct care aparține graficului funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0;+\infty)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră $I_n = \int_2^3 \dfrac{x^n}{x^2-1} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se verifice că $I_0 = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Să se calculeze I_1.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \dfrac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Varianta 17

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^{*}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}^{*}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția *f* este descrescătoare pe $(0,2]$.

5p **c)** Să se arate că $2e^{\sqrt{3}}\le 3e^{\sqrt{2}}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{1}^{2}(x-f(x)+\ln x)^{2}\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă *F* a funcției *f* este concavă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[1,e]\to\mathbb{R},\ h(x)=f(x)+x$, axa *Ox* şi dreptele $x=1$ şi $x=e$.

Varianta 18

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^{2}+(x-1)^{2}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=4x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{2}}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x}+\ln x$.

5p **a)** Ştiind că $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\ln x$, să se verifice că $\int g(x)\,dx=g(x)+\mathcal{C},\ x>0$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{1}^{e}f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_{1}^{e}xf\left(x^{2}\right)dx=\dfrac{e^{e^{2}}+e^{2}-e+1}{2}$.

Varianta 19

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $0<f(x)\le\dfrac{1}{2e}$, pentru orice $x\in\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e x\left(f(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se verifice că $\displaystyle\int_1^2 f'(x)f(x)dx=-\frac{22}{81}$.

Varianta 20

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se arate că f este funcție crescătoare pe $[0;1]$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\dfrac{3}{e}\le\dfrac{1}{f(x)}\le 2$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$ şi $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $F(x)=-f(x)+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=F(x)-f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx$.

Varianta 21

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\geq 8$, oricare ar fi $x>1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x+3^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=3^{-x}$.

5p **c)** Să se arate că orice primitivă F a funcției *f* este concavă pe $(-\infty,0]$ și convexă pe $[0,+\infty)$.

Varianta 22

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{2}^{e}\left(f(x)-\dfrac{1}{x-1}\right)dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă *F* a funcției *f* este concavă pe $[2;+\infty)$.

5p **c)** Să se determine *a* real, $a>2$ astfel încât aria suprafeței plane, mărginite de graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=a$, să fie egală cu $\ln 3$.

Varianta 23

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției *f*.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1\right)$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ și $F(x)=(x+1)\ln x-x+1$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 f\left(e^x\right)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x)\,dx=\dfrac{(3\ln 2-1)^2}{2}$.

Varianta 24

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine punctul de extrem al funcției *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $\ln\sqrt{x}\le\dfrac{x^2-1}{4}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Fie $I_n=\int_1^2 x^n e^x\,dx$, pentru $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se arate că $I_1=e^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(n+1)I_n+I_{n+1}=e\left(2^{n+1}e-1\right)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Varianta 25

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(x)\geq 1,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se scrie ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^3+mx^2+nx+p,$ unde $m,n,p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m=0,\ n=-3,\ p=2$, să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $m,n,p\in\mathbb{R},$ știind că $f'(-1)=f'(1)=0$ și $\int_{-1}^{1} f(x)dx=4$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt.$

Varianta 26

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $e^{x^2}+e^x\geq x^2+x+2,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=1+\ln x$ și $g(x)=x\ln x$.

5p **a)** Să se arate că g este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

Varianta 27

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{1004}+2009^x$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx$.

Varianta 28

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}\cdot e^x-1, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este concavă pe $(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se determine $\int\left(x^2+1\right)\cdot f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln(2e)$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e(e-1)$.

Varianta 29

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)-f'(1)=1$.

5p **b)** Să se determine punctul de extrem al funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{x}$

2. Se consideră integralele $I=\int_0^1 \dfrac{e^x}{x+1}\,dx$ şi $J=\int_0^1 \dfrac{xe^x}{x+1}\,dx$.

5p **a)** Să se verifice că $I+J=e-1$.

5p **b)** Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x\ge x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $J\ge\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $I=\dfrac{e-2}{2}+\int_0^1 \dfrac{e^x}{(x+1)^2}\,dx$.

Varianta 30

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **b)** Să se arate că funcția *f* este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$.

2. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Utilizând faptul că $(1+x)^n\le(1+x)^{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in[0,1]$, să se arate că $I_{2009}\ge I_{2008}$.

5p **c)** Folosind, eventual, identitatea $x(1+x)^n=(1+x)^{n+1}-(1+x)^n$, adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $I_n=\dfrac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

Varianta 31

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x\ln x}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq -\frac{1}{2e}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f''(x)\,dx=2e-1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f\left(x^2\right)}{x}\,dx$.

Varianta 32

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{e^x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+f'(x)}{x}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$, $g(x)=1-x+x^2-x^3+...+x^{2008}-x^{2009}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f*.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 (x+1)g(x)\,dx<1$.

Varianta 33

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2e^x}{x+e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $-1\le f(x)\le\frac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x\ge 0$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Utilizând, eventual, inegalitatea $\frac{x^n}{2}\le\frac{x^n}{x+1}\le x^n$, adevărată pentru orice $x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\frac{1}{2}\le 2010\cdot I_{2009}\le 1$.

Varianta 34

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2x+3)e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$ şi $g(x)=2x+\ln x+1$.

5p **a)** Să se arate că f este o primitivă a funcției *g.*

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

Varianta 35

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{x}-3x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{3\sqrt{x}-6}{2}$, pentru orice $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să e demonstreze că $-4\le f(x)+f\left(x^2\right)\le 0$, pentru orice $x\in(0;1]$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+3x^2+2$ și $F(x)=e^x+x^3+2x-1$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 \left(x f(x)+F(x)\right)dx=F(1)$.

Varianta 36

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(x^2-3x-3\right)e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că tangenta la graficul funcției f, dusă în punctul de coordonate $(-2,f(-2))$, este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ e^x+1, & x\ge 0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 x f\left(x^2\right)dx=\dfrac{e}{2}$.

Varianta 37

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Să se arate că $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ și $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f'(x)dx=\ln 2$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int g(x)dx=f(x)+\mathcal{C}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 \dfrac{g(x)}{f^2(x)}dx$.

Varianta 38

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Știind că $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n=\int_e^{e^2} x\ln^n x\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se demonstreze că are loc relația $I_n=\dfrac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 39

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x+1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se determine punctul de extrem al funcției f.

5p **c)** Să se arate că $2-e\le f(2)\le 0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\ge 1\\ -x+1, & x<1\end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine $a\in(0,1)$ astfel încât $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 x f\left(e^x\right)dx$.

Varianta 40

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{1}{x}$ şi $F(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 F(x)\cdot f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

Varianta 41

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in(1;+\infty)$

5p **b)** Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}$ și $g(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\ln x$.

5p **a)** Să se arate că $\int_1^4 f(x)dx=\ln 4+2$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_1^4 g(x)dx=\ln 4-\dfrac{3}{4}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f\left(x^2\right)\cdot g\left(x^2\right)dx$.

Varianta 42

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2010}+2010^x$.

5p **a)** Să se determine $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}$.

2. Se consideră funcțiile $f,\ g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$ și $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_1^e g(x)\,dx=1$.

5p **b)** Folosind identitatea $f(x)=g(x)-\dfrac{x}{x^2+1}$, adevărată pentru orice $x>0$, să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Utilizând inegalitatea $f(x)\le\dfrac{1}{2x^2}$, adevărată pentru orice $x\in[1,e]$, să se arate că $\ln\dfrac{e^2+1}{2}\ge\dfrac{e+1}{e}$.

Varianta 43

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ avem $\dfrac{2}{3}\le f\left(x^4\right)+f\left(x^2\right)\le 2$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficelor funcțiilor $g,h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ și $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sunt egale.

Varianta 44

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(0)=1$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{e^x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x)dx=e-\dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $\int_e^{e^2}\dfrac{f(\ln x)}{x}\,dx=F(2)-F(1)$.

Varianta 45

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$ şi $g(x)=xe^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=g(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției g.

5p **c)** Dacă $I\subset\mathbb{R}$ este un interval, să se demonstreze că funcția g este crescătoare pe I dacă şi numai dacă funcția f este convexă pe I.

2. Se consideră funcțiile $f, g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ şi $g(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)dx$.

5p **c)** Să se determine numărul real $a\in(1;+\infty)$ astfel încât $\int_1^a f(x)dx=2$.

Varianta 46

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\in(0;1)\\ 1+\ln x, & x\geq 1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq\dfrac{3}{4}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcțiile $f, g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ şi $g(x)=x\ln x$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_1^2 f(x)dx=2\ln 2+\dfrac{7}{3}$.

5p **b)** Să se arate că $\int_1^2 g(x)dx=2\ln 2-\dfrac{3}{4}$.

5p **c)** Să se arate că există $x_0\in(1;2)$ astfel încât $f(x_0)>g(x_0)+3$.

Varianta 47

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in[1;+\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\ln\frac{2010}{2009}\le\frac{1}{2}$.

5p **c)** Folosind faptul că $1\le x\le x^2\le 2$, oricare ar fi $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2-x\le 2\ln x$, pentru orice $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră $I_n=\int_2^3\frac{x^n}{x^2-1}\,dx$.

5p **a)** Să se arate că $I_0=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

5p **b)** Să se calculeze I_1.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Varianta 48

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\ge f(x)$, oricare ar fi $x\in(1;+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,f(x)\,f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

2. Se consideră $I_n=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^n\left(x^2+1\right)}\,dx$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se verifice că $I_0+I_2=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

5p **b)** Utilizând identitatea $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x\neq 0$, să se determine I_1.

5p **c)** Să se arate că $I_n+I_{n-2}<\frac{1}{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

Varianta 49

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ și $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2}{2x}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)\cdot f''(x)\,dx=-1$.

Varianta 50

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}, & x\ge 0\\ e^x, & x<0\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ și $g(x)=x$.

5p **a)** Să se determine $\int f\left(\sqrt{x}\right)dx,\ x\in[0;\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se verifice că $\int_0^1 f\left(x^{50}\right)\cdot g^{99}(x)\,dx=\frac{e-1}{100}$.

Varianta 51

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+3\ ,\ x\le 1\\ \ln x\ ,\ x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(e^x\right)+f\left(e^{x^2}\right)+\ldots+f\left(e^{x^{2009}}\right)}{x^{2009}}$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2+2x$ și $F(x)=e^x+\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$h(x)=\dfrac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Varianta 52

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax-6\ ,\ x<4\\ \sqrt{x}\ ,\ x\ge 4\end{cases}$, unde a este parametru real.

5p **a)** Să se determine valoarea reală a lui a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=4$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(9)$.

5p **c)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(9,3)$.

2. Pentru oricare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ și $f_{n+1}(x)=\int\limits_0^x f_n(t)\,dt$.

5p **a)** Să se determine $f_1(x)$, unde $x\in[0,\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int\limits_1^e f_1(x)\cdot\ln x\,dx=\dfrac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f_2(x), x\in[0,1]$.

Varianta 53

SUBIECTUL III (30p)

5p **1. a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-6x^2+18x+12$.

5p **c)** Se consideră funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(x^2-1\right)\ln x$. Să se demonstreze că $g(x)\geq 0,$ oricare ar fi $x\in(0;+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ \frac{1}{x+1}-\sqrt{x}, & x\geq 0 \end{cases}$

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ $g(x)=-x f\left(x^2\right),$ axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$.

Varianta 54

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ şi $g(x)=\frac{x-1}{e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=0$.

5p **b)** Să se determine coordonatele punctului de extrem al funcţiei *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x)-f(x)\leq 1+\frac{1}{e^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$ şi $g(x)=1+\frac{2x}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x)dx=\ln 2$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că există $x_0\in(0;1)$ astfel încât $f(x_0)<g(x_0)-2x_0$.

Varianta 55

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 3^x+1\ ,\ x\le 1 \\ ax+2\ ,\ x>1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se determine valoarea parametrului real *a* astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f .

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot x\right)$.

2. Se consideră funcția $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

5p **a)** Să se determine funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția F este descrescătoare pe $[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\dfrac{1}{6}\le\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx\le\dfrac{1}{2}$.

Varianta 56

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f''(x)}$.

5p **c)** Să se arate că $e^{\sqrt{2009}}+\sqrt{2010}\le e^{\sqrt{2010}}+\sqrt{2009}$.

2. Se consideră funcțiile f , $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$ și $g(x)=f''(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine primitiva funcției g a cărei asimptotă spre $+\infty$ este dreapta de ecuație $y=2x$.

Varianta 57

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ex-1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției f în punctul $O(0,0)$ şi dreapta de ecuație $x=1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 0 \\ x+\sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^c f(x)\,dx,$ unde a,b,c sunt numere reale şi funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci numerele $F(a), F(b), F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Varianta 58

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $\sqrt{x}\ge 1+\ln\sqrt{x}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

5p **2. a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (t^2+t+1)\,dt}{x^3+1}$.

5p **b)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, care verifică relația $F(1)=0$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv a ştiind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2$ este egal cu 5π.

Varianta 59

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

5p **c)** Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n e^x$ şi $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 e^{-x} f_1(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Să se calculeze I_1.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_n+nI_{n-1}=e$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Varianta 60

SUBIECTUL III (30p)

5p **1. a)** Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ 2x-1, & x\geq 1\end{cases}$ în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze derivata funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^3-15x^2+24x-1$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=32$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+n}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2 f_0(x)\,dx$.

5p **b)** Pentru $n\in\mathbb{N}$ să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_n, axa Ox şi dreptele $x=1$, $x=2$.

5p **c)** Ştiind că F este o primitivă a funcției f_1, să se arate că funcția $G:[1,2]\to\mathbb{R}$, $G(x)=F(x)-\frac{5}{6}x$ este crescătoare.

Varianta 61

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x-x\ln 2$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

5p **c)** Să se determine punctul de extrem al funcției f.

5p **2. a)** Să se determine primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[1,e]\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$.

5p **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(x+2)}\,dx$.

Varianta 62

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $h:[0,2]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

5p **c)** Să se arate că dacă, $a>0$, atunci $\dfrac{1}{a+2}\le\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx\le\dfrac{1}{a+1}$.

Varianta 63

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in[1,+\infty)$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f pe $[1,+\infty)$.

5p **c)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+5, & x<-1\\ 3x^2+1, & x\geq -1\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive.

5p **b)** Să se calculeze $\int\limits_{-3}^{-2} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $m\in[-1,\infty)$ aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=m$ și $x=m+1$ este cel puțin $\dfrac{5}{4}$.

Varianta 64

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ și $h(x)=f^2(x)$.

5p **a)** Să se verifice că $h'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x\geq 0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0;+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}+1$.

5p **a)** Să se arate că $\int\limits_0^1 (x+1)(x+3)f(x)\,dx=\dfrac{22}{3}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv k astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=k$ să fie egală cu $k+\ln k$.

Varianta 65

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f .

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)+f\left(x^3\right)\geq -2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine numărul real p astfel încât volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(px)$, pentru orice $x\in[0,1]$ să fie minim.

Varianta 66

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+2}, & x\geq 0\\ x+\dfrac{3}{2}, & x<0\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\in\left[\dfrac{3}{2}\,,\,2\right)$, oricare ar fi $x\in[0;+\infty)$.

5p **2. a)** Să se calculeze $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2+2x}\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_0^1 \dfrac{x}{x+1}\,dx\leq 1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ şi numerele reale pozitive *a*, *b* şi *c*. Să se demonstreze că, dacă numerele $\int_1^a f(x)\,dx$, $\int_1^b f(x)\,dx$, $\int_1^c f(x)\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a , b , c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Varianta 67

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+4$ şi $g(x)=x^3-5x^2+8x-4$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)-g'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$ şi $F(x)=e^x+x-\ln x$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția F este o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Să se calculeze $\int\limits_1^2 x\left(F(x)-x+\ln x\right)dx$.

5p **c)** Să se determine parametrul real m astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$ să fie egală cu e^m-2.

Varianta 68

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-2}, & x\in(-\infty,1]\\ \ln x-2, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int\limits_0^1 (x-2)f(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int\limits_1^x \left(f(t)+2\right)dt$.

Varianta 69

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^n$, $n\in\mathbb{Z}^*$.

5p **a)** Pentru $n=2$ să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

5p **b)** Pentru $n=-1$ să se determine $a\in[0;+\infty)$ astfel încât $\int_0^a f(x)dx=0$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)f(x)\,dx$.

Varianta 70

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine coordonatele punctului graficului funcției f, în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int(x+1)(x+2)f(x)dx=x^2+3x+\mathcal{C}$, $x\geq 0$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-f(x+1)-\frac{1}{x+1}$.

Varianta 71

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = \ln x$ şi $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.

5p **a)** Să se determine funcția f_1.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f_2.

5p **c)** Să se arate că $f_0(x) \le \frac{1}{f_1(x)} - 1$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)\, dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx > \int_2^3 f(x)\, dx + \int_3^4 f(x)\, dx$.

Varianta 72

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$.

Varianta 73

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x^2+1}, & x\le 1\\ \dfrac{2x+a}{x^2+2}, & x>1\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real *a* astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficului funcției f.

5p **c)** Să se determine numărul real *a* astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $(2; f(2))$ să fie egală cu 1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=e-1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $1\le\int_0^1 f(x)\,dx\le e$.

Varianta 74

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f,h:\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)$ și $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **a)** Să se arate că $h(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția *h* este descrescătoare pe $(-\infty;1)$.

5p **c)** Să se arate că $\left(f'(x)\right)^2\ge f(x)\cdot f''(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2009}+x+1$.

5p **a)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $h:[1,3]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-x^{2009}-1$.

5p **b)** Să se determine primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f, care verifică condiția $F(0)=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{2010}}$.

Varianta 75

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1}, & x\le 0\\ -2x+1, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$.

5p **c)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^n}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_1^e f_1\left(\sqrt{x-1}\right)dx=1$.

5p **b)** Să se determine primitiva G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$, care verifică relația $G(1)=\dfrac{13}{15}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f_n(x)\,dx$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

Varianta 76

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $2009\sqrt{2011}\le 2010\sqrt{2010}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x-2, & x<1\\ (x+1)\ln x, & x\ge 1\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx=-\dfrac{7}{6}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[1;e]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{x+1}$.

Varianta 77

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $F, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\cdot e^{x}$ şi $f(x)=(x+1)e^{x}$.

5p **a)** Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{F(x)-f(x)}{e^{x}+1}\,dx$.

Varianta 78

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2008}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2009}\right)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{x}$ şi $g(x)=x\cdot e^{x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$.

Varianta 79

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+3^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\cdot f_2(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x)\,dx\le\ln 2$.

Varianta 80

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\ge 4$, pentru orice $x\in(1;+\infty)$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{e^x}{e^{nx}+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int f_0(x)\,dx$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx\le\int_0^1 f_n(x)\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Varianta 81

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;-1)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq -1$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=ax+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+1$ să fie o primitivă a funcției f_a.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_1(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f_a^{\,2}(x)\,dx\geq\frac{1}{4}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

Varianta 82

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;-2)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $x+\frac{2}{\sqrt{x}}\geq 3$ pentru orice $x>0$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=e^{x^n}$.

5p **a)** Să se determine $\int f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f_1(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\cdot f_3(x)$.

Varianta 83

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$, unde $x>0$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=f(x)$, $x\in[1,2]$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\ln x\,dx$.

Varianta 84

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{-x^2+3x-2}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\ge\frac{1}{e}$ pentru orice $x\le 2$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2}$.

5p **a)** Să se determine $\int f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+2}\le\sqrt{3}$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2009}f(x)\,dx\le\frac{\sqrt{3}}{2010}$.

Varianta 85

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei oblice la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, definită prin $h(x)=x\,f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției *g*.

Varianta 86

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\ln x\le\frac{x}{e}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției *f*.

5p **c)** Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x}\ge x$, pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că $\int_0^1 f^{2009}(x)\,dx\le\frac{1}{2010}$.

Varianta 87

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(x^2+2x+1\right)\cdot e^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=(x+1)(x+3)\cdot e^x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(-2)+f(-4)\le\dfrac{8}{e^3}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* admite primitive.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției *f* este convexă pe $(1;+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^e f(x)\,dx$.

Varianta 88

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\le 3$, pentru orice $x\le 2$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ şi $F(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=2$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e F(x)\cdot\ln x\,dx$.

Varianta 89

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de concavitate şi intervalele de convexitate ale funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\geq -\frac{1}{2}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^{1-x}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f*.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=x\cdot f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(g(x)-f(x)\right)dx\geq 0$.

Varianta 90

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;2)$.

5p **c)** Să se arate că $2\sqrt{x}\geq 2+\ln x$, pentru orice $x>0$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+(1-x)^n$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției f_2.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\cdot f_2(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_n(x)\,dx\geq\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 91

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq 0,$ oricare ar fi $x>0$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(2-x)^n$.

5p **a)** Să se determine $\int f_1(x)\,dx$, unde $x\in[0,2]$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=f_1(x)\cdot e^x$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=2$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f_5.

Varianta 92

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine asimptota verticală la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $e^x\geq ex,$ pentru orice $x>0$.

2. Fie funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției *f*.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Varianta 93

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^x-1$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $O(0;0)$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Să se determine $\int f_1(x)\cdot\sqrt{x+1}\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f_1.

5p **c)** Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+1}\geq 1$, oricare ar fi $x\in[0;1]$, să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x)\leq\dfrac{1}{2010}$.

Varianta 94

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot e^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=(x+1)\cdot e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n+x+2}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine $\int x\cdot f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că aria suprafeței plane, cuprinse între graficul funcției f_{2008} și axa *Ox* și dreptele $x=0$ şi $x=1$, este mai mică sau egală cu 2.

Varianta 95

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2}\right)\ge f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$ şi $g(x)=\sqrt{1-x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Varianta 96

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $f(2008)\ge f(2009)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f^2(x)}{x^2+1}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot f(x)$, unde $x\in[0,1]$.

Varianta 97

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2009}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2010}\right)$.

2. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Să se determine $\int f'(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

5p **c)** Să se arate că $\int_1^e e^x f(x)dx\le e^e-e$.

Varianta 98

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(2;e^2\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\ge e^2$, pentru orice $x>1$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sqrt{x^n+4x}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_1^4 f_1(x)\,dx=\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 \dfrac{x+2}{f_2^2(x)}dx$.

5p **c)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[1,4]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$.

Varianta 99

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

5p **c)** Să se arate că $\frac{x+2}{3}\geq\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 (x+1)\cdot f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Folosind faptul că $1\leq(x+1)^2\leq 4$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f, este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28},\frac{\pi}{7}\right]$.

Varianta 100

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left(x^{n+1}+1\right)\cdot e^x$.

5p **a)** Să se determine $\int f_0(x)\cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_{2008}(x)\,dx+\int_0^1 f_{2010}(x)\,dx\geq 2\int_0^1 f_{2009}(x)\,dx$.