

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 1**<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y - 6$.

- 5p** a) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă.
- 5p** b) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = 6$.
- 5p** c) Să se demonstreze că mulțimea numerelor reale împreună cu legea ”*” formează o structură de grup.
- 5p** d) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x * 4^x = 0$.
- 5p** e) Pentru $a \in \mathbb{R}$, să se calculeze $m = \underbrace{a * a * \dots * a}_{7 \text{ termeni}}$.
- 5p** f) Să se arate că numărul $x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} * \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ este număr rațional.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 2<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.

5p a) Să se arate că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă.

5p c) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = 4$.

5p d) Să se demonstreze că mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ împreună cu legea ”*” formează o structură de grup.

5p e) Să se calculeze $m = \underbrace{5 * 5 * \dots * 5}_{5 \text{ termeni}}$.

5p f) Să se arate că numerele $a = (5 * 5) - 3$, $b = (5 * 5 * 5) - 3$, $c = (5 * 5 * 5 * 5) - 3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 3<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- 5p** a) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x * (x + 1) = x + 2$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă.
- 5p** c) Să se arate că legea ”*” nu admite element neutru.
- 5p** d) Să se demonstreze că $|x + y| \leq (x * y) \sqrt{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** e) Să se arate că numerele $a = (1 * 1)^2$, $b = (1 * 1 * 1)^2$, $c = (1 * 1 * 1 * 1)^2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** f) Să se arate că numărul $(1 + \sqrt{7}) * (1 - \sqrt{7})$ este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 4<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = (1, \infty)$ se definește operația $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$.

- 5p** a) Să se verifice că $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}$, $\forall x, y \in G$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă pe G .
- 5p** d) Să se verifice că legea "*" admite elementul neutru $e = \sqrt{2}$.
- 5p** e) Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea "*" formează o structură de grup.
- 5p** f) Să se rezolve ecuația $x * 2 = 5$, unde $x \in G$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 5<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = (0, \infty)$ se consideră legea de compoziție $x * y = x^{\log_2 y}$.

5p a) Să se arate că $x * y = 2^{(\log_2 x) \cdot (\log_2 y)}$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p b) Să se compare numerele $a = (2^2 * 4^2) * 2^3$ și $b = (2^2 \cdot 2^3) * (2^2 \cdot 4^2)$

5p c) Să se arate că legea "*" este asociativă pe G .

5p d) Să se verifice că legea "*" admite elementul neutru $e = 2$.

5p e) Să se determine simetricul elementului $x = 8^3$ în raport cu legea "*".

5p f) Să se rezolve ecuația $x * x = 2$, unde $x \in G$.

Pe mulțimea $G = (0, 1)$ se definește operația $x * y = \frac{xy}{2xy + 1 - x - y}$.

- 5p** a) Să se verifice că $x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă pe G .
- 5p** d) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = \frac{1}{2}$.
- 5p** e) Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea ”*” formează o structură de grup.
- 5p** f) Să se rezolve ecuația $x * \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$, unde $x \in G$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 7**<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

- 5p** a) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă.
- 5p** b) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = 0$.
- 5p** c) Să se demonstreze că \mathbb{R} împreună cu legea ”*” formează o structură algebrică de grup comutativ.
- 5p** d) Să se arate că înmulțirea numerelor reale este distributivă față de legea ”*”.
- 5p** e) Să se demonstreze că $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ este corp, unde ” \cdot ” este înmulțirea pe \mathbb{R} .
- 5p** f) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 8<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$. Se notează cu H mulțimea numerelor întregi impare.

5p a) Să se verifice că $x * y = \frac{1}{2}(x + 1)(y + 1) - 1$, pentru oricare $x, y \in \mathbb{Q}$.

5p b) Să se arate că legea ”*” este asociativă.

5p c) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = 1$.

5p d) Să se arate că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p e) Să se determine elementele $x \in H$ cu proprietatea că există $x' \in H$, astfel încât $x * x' = x' * x = 1$.

5p f) Să se arate că $x * \frac{1}{x} \geq 1$, pentru orice $x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 9<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2(x + y) + m$, $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se verifice că $x * y = (x - 2)(y - 2) + m - 4$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine m astfel încât $2009 * 2009 = 2007^2 + 2$.

5p c) Pentru $m = 6$ să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * a = a * x = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p d) Să se determine m știind că elementul neutru al legii "*" este $e = 3$.

5p e) Pentru $m = 6$ să se calculeze $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \dots * \sqrt{2009}$, știind că legea "*" este asociativă.

5p f) Să se determine cea mai mică valoare a numărului m astfel încât $x * y \in [2, \infty)$, pentru orice $x, y \in [2, \infty)$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 10<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

5p a) Să se verifice că $x * y = 2(x - 1)(y - 1) + 1$, pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă.

5p c) Să se verifice că legea "*" admite elementul neutru $e = \frac{3}{2}$.

5p d) Se consideră mulțimea $G = (1, \infty)$. Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p e) Să se arate că $G = (1, \infty)$ împreună cu legea "*" formează o structură de grup comutativ.

5p f) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 11<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 1}$.

- 5p** a) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = -1$.
- 5p** c) Să se demonstreze că mulțimea numerelor reale împreună cu legea ”*” formează o structură de grup.
- 5p** d) Să se demonstreze că expresia $E(x) = x * (-x)$ nu depinde de x .
- 5p** e) Să se arate că $\frac{x}{y} * \frac{y}{x} \neq 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^*$.
- 5p** f) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x * 4^x = \sqrt[3]{3}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 12<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor raționale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + a$ și

$$x \circ y = xy + 2x + 2y + 2, \text{ cu } a \in \mathbb{Q}.$$

- 5p** a) Să se arate că legea " \circ " este asociativă.
- 5p** b) Să se verifice că legea " \circ " admite elementul neutru $e = -1$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{Q}$, astfel încât $2 \circ (3 * 1) = (2 \circ 3) * (2 \circ 1)$.
- 5p** d) Să se arate că mulțimea \mathbb{Q} împreună cu legea " $*$ " formează o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ pentru care are loc egalitatea $x \circ x \circ x = (x + 2)^3 + m$, oricare $x \in \mathbb{Q}$.
- 5p** f) Pentru $a = 2$, să se rezolve în mulțimea \mathbb{Q} ecuația $x * x = x \circ x$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 13<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + 4$.

- 5p** a) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea $2^a * 2^{-a} \geq 6$.
- 5p** b) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x * 2^{x+1} = 16$.
- 5p** c) Să se arate că legea ”*” este asociativă.
- 5p** d) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = -4$.
- 5p** e) Să se arate că mulțimea \mathbb{R} împreună cu legea ”*” formează o structură de grup comutativ.
- 5p** f) Să se rezolve ecuația $(\log_2 x) * (\log_2 x^2) = 7$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 14<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 6x - 6y + 42$. Fie mulțimea $G = [5, 7] \subset \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se verifice că $x * y = (x - 6)(y - 6) + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă pe \mathbb{R} .
- 5p** c) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = 7$.
- 5p** d) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** e) Fie $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x * x = 7\}$. Să se arate că mulțimea M împreună cu legea ”*” formează o structură de grup comutativ.
- 5p** f) Să se determine numerele întregi x și y pentru care $x * y = 7$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 15<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = (\sqrt{2}, \infty)$ se definește operația $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6}$.

- 5p** a) Să se verifice că $x * y = \sqrt{(x^2 - 2)(y^2 - 2) + 2}$, $\forall x, y \in G$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă pe G .
- 5p** d) Să se verifice că legea "*" admite elementul neutru $e = \sqrt{3}$.
- 5p** e) Să se determine simetricul elementului $x = \sqrt{8}$ în raport cu legea "*".
- 5p** f) Să se arate că numerele $a = (2 * 2)^2 - 2$, $b = (2 * 2 * 2)^2 - 2$, $c = (2 * 2 * 2 * 2)^2 - 2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 16<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = xy - 3x - 3y + a$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se arate că pentru $a = 12$ legea " \circ " este asociativă.

5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că legea " \circ " admite elementul neutru $e = 4$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{Q}$, astfel încât $2 \circ (3 * 1) = (2 \circ 3) * (2 \circ 1)$.

5p d) Să se arate că mulțimea \mathbb{R} împreună cu legea " $*$ " formează o structură de grup comutativ.

5p e) Pentru $a = 12$ să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x \circ x \circ x = (x - 3)^3 + m$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$

5p f) Pentru $a = 12$ să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * y = 2 \\ x \circ y = 1 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 17<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + 3$.

5p a) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă.

5p b) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = -3$.

5p c) Să se demonstreze că mulțimea \mathbb{R} împreună cu legea ”*” formează o structură de grup.

5p d) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(\log_2 x) * (\log_4 x) = 6$.

5p e) Să se arate că numerele $a = 2 * 2 * 2$, $b = a * 2$ și $c = b * 2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p f) Să se arate că numărul $m = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} * \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 18<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.

5p a) Să se verifice că $x * y = 3(x + 2)(y + 2) - 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă.

5p c) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = -\frac{5}{3}$.

5p d) Să se determine simetricul numărului $x = \frac{1}{3}$ în raport cu legea ”*”.

5p e) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea $x * x * x = 3^n (x + 2)^3 - n, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p f) Să se arate că numerele $a = (-1) * (-1) + 2, b = (-1) * (-1) * (-1) + 2, c = (-1) * (-1) * (-1) * (-1) + 2$

SUBIECTUL II (30p) Varianta 19<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se definește operația $x * y = \frac{4(x + y)}{4 + xy}$.

- 5p** a) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = 0$.
- 5p** d) Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea ”*” formează o structură de grup.
- 5p** e) Să se arate că $x * y = \frac{2(x + 2)(y + 2) - 2(2 - x)(2 - y)}{(x + 2)(y + 2) + (2 - x)(2 - y)}$, pentru orice $x, y \in G$.
- 5p** f) Să se determine $x \in G$ pentru care $1 * x = 1 * 1 * 1$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 20<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 1$ și $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$.

5p a) Să se demonstreze că legea " \circ " este asociativă.

5p b) Să se verifice că legea " \circ " admite element neutru $e = 3$.

5p c) Să se demonstreze că legea " \circ " este distributivă față de legea " $*$ ".

5p d) Să se arate că mulțimea \mathbb{R} împreună cu legea " $*$ " formează o structură de grup comutativ.

5p e) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $a \circ x = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p f) Să se rezolve în mulțimea \mathbb{R} ecuația $x \circ 3 \circ 1 = x \circ x$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 21**<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = xy + 2x + 2y + a$, cu $a \in \mathbb{Z}$.

- 5p** a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ știind că legea ”*” admite element neutru.
- 5p** b) Pentru $a = 2$ să se demonstreze că legea ”*” este asociativă.
- 5p** c) Dacă $a = 2$ să se arate că $(x + y + 2) * z = (x * z) + (y * z) + 2$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- 5p** d) Pentru $a = 2$ să se determine mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{există } x' \in \mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x * x' = -1\}$.
- 5p** e) Pentru $a = 2$ să se determine $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x * y = 3$.
- 5p** f) Fie mulțimea $H = \{-3, -1\}$. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât, pentru oricare $x, y \in H$, să rezulte că $x * y \in H$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 22<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$.

5p a) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x * x = 1$.

5p b) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă.

5p c) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = 1$.

5p d) Să se determine simetricul numărului $x = \sqrt[3]{10}$ în raport cu legea ”*”.

5p e) Să se arate că numerele $a = (2 * 2)^3$, $b = (2 * 2 * 2)^3$ și $c = (2 * 2 * 2 * 2)^3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p f) Să se arate că numărul $m = \sqrt[3]{32} * \sqrt[3]{33}$ este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 23<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy + 6x + 6y + 15$.

5p a) Să se arate că $x * y = 2(x + 3)(y + 3) - 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă.

5p c) Să se verifice că legea "*" admite elementul neutru $e = -\frac{5}{2}$.

5p d) Se consideră mulțimea $G = (-3, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x * y \in G$.

5p e) Să se arate că mulțimea $G = (-3, +\infty)$ împreună cu legea "*" formează o structură de grup.

5p f) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea $x * x * x = 2^n (x + 3)^3 - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 24<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = (2, +\infty)$ se definește operația $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20}$.

5p a) Să se arate că $x * y = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 4}$, $\forall x, y \in G$.

5p b) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p c) Să se demonstreze că legea ”*” este asociativă pe G .

5p d) Să se verifice că legea ”*” admite elementul neutru $e = \sqrt{5}$.

5p e) Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea ”*” formează o structură de grup.

5p f) Să se determine numerele naturale $x, y \in G$ pentru care $x * y = 8$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 25<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 5$ și $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.

- 5p** a) Să se arate că legea " \circ " este asociativă.
- 5p** b) Să se verifice că legea " \circ " admite elementul neutru $e = 6$.
- 5p** c) Să se arate că legea " \circ " este distributivă față de legea " $*$ ".
- 5p** d) Să se demonstreze că \mathbb{Z} împreună cu legea " $*$ " formează o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Să se arate că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel.
- 5p** f) Să se determine numărul întreg x pentru care $x \circ x = x^2$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 26<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - \sqrt{2}(x + y) + 2 + \sqrt{2}$.

5p a) Să se arate că $x * y = (x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $x * \sqrt{2}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” este asociativă.

5p d) Să se determine elementul neutru al legii „ $*$ ”.

5p e) Să se demonstreze că structura algebrică $(\mathbb{R}, *)$ nu este grup.

5p f) Să se calculeze $(-\sqrt{3}) * (-\sqrt{2}) * 1 * 0 * 1 * (\sqrt{2}) * (\sqrt{3})$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 27<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 2009(x + y) + 2009^2 + 2009$.

- 5p** a) Să se arate că $x \circ y = (x - 2009)(y - 2009) + 2009$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- 5p** b) Să se demonstreze că legea „ \circ ” este asociativă.
- 5p** c) Folosind eventual a) să se calculeze $2009 \circ 2009 \circ 2009 \circ 2009$.
- 5p** d) Să se determine elementul neutru al legii „ \circ ”.
- 5p** e) Se consideră mulțimea $H = [2009, +\infty)$. Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.
- 5p** f) Să se rezolve în mulțimea \mathbb{R} ecuația $x \circ (x - 1) = 2009^2$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 28**<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = \frac{(x+1)(y+1)}{2} - 1$ și

$$x \circ y = \begin{cases} \frac{(x+1)(y+1)}{2} - 1, & x \in \mathbb{R}^* \text{ sau } y \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = y = 0 \end{cases}.$$

- 5p** a) Să se demonstreze că legea de compoziție “*” este asociativă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se arate că există $e \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * e = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se arate că structura algebrică $(\mathbb{R}, *)$ nu este grup.
- 5p** d) Să se calculeze $\underbrace{(-1) * 0 * 1 * (-1) * 0 * 1 * \dots * (-1) * 0 * 1}_{201 \text{ termeni}}$.
- 5p** e) Se consideră mulțimea $H = \{-1, 0, 1\}$. Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.
- 5p** f) Să se arate că legea “ \circ ” admite element neutru pe $H = \{-1, 0, 1\}$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 29**<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = \frac{xy + x + y - 1}{2}$ și

$$x \circ y = \begin{cases} \frac{xy + x + y - 1}{2}, & x \in \mathbb{R}^* \text{ sau } y \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = y = 0 \end{cases}.$$

- 5p** a) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se calculeze $x * (-1)$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se calculeze $(-2009) * (-2008) * \dots * (-1) * 0 * 1 * \dots * 2008 * 2009$.
- 5p** d) Să se arate că legea „ $*$ ” admite element neutru.
- 5p** e) Se consideră mulțimea $H = \{-1, 0, 1\}$. Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.
- 5p** f) Să se arate că legea „ \circ ” admite element neutru pe H .

SUBIECTUL II (30p) Varianta 30<http://www.pro-matematica.ro>

Pe intervalul $I = [1, +\infty)$ se definește operația $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$.

- 5p** a) Să se arate că $x * y \in I$, pentru oricare $x, y \in I$.
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se determine elementul neutru al legii „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se arate că $(x * x)^2 - 1 = (x^2 - 1)^2$, pentru orice $x \in I$.
- 5p** e) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție „ $*$ ” definită pe mulțimea $H = \{0, 1, \sqrt{2}\}$.
- 5p** f) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $H = \{0, 1, \sqrt{2}\}$ în raport cu legea „ $*$ ” definită pe H .

SUBIECTUL II (30p) Varianta 31<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 2$ și $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.

- 5p** a) Să se determine elementul neutru al legii „ $*$ ”.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se arate că legea „ \circ ” admite element neutru pe \mathbb{Z} .
- 5p** d) Se consideră mulțimea $H = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.
- 5p** e) Să se demonstreze că are loc egalitatea $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- 5p** f) Să se arate că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 32**<http://www.pro-matematica.ro>

Se consideră $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, mulțimea tuturor resturilor obținute prin împărțirea numerelor naturale la 8. Pe mulțimea M se definesc legile de compoziție $x \odot y = r$, unde r este restul împărțirii produsului $x \cdot y$ la 8 și $x \oplus y = p$, unde p este restul împărțirii sumei $(x + y)$ la 8.

Se admite că legile de compoziție " \odot " și " \oplus " sunt asociative.

- 5p** a) Să se alcătuiască tablele legilor de compoziție " \odot " și " \oplus " definite pe mulțimea M .
- 5p** b) Să se arate că $(5 \oplus 6) \odot 7 = (5 \odot 7) \oplus (6 \odot 7)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\underbrace{7 \odot 7 \odot \dots \odot 7}_{2010 \text{ cifre}}$.
- 5p** d) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii M în raport cu legea " \odot ".
- 5p** e) Se consideră mulțimea $H = \{0, 2, 4, 6\}$. Să se arate că $x \oplus y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.
- 5p** f) Fie mulțimea $G = \{1, 3, 5, 7\}$. Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea de compoziție " \odot " formează o structură de grup comutativ.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 33<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = 1 + \log_3 x + \log_3 y$.

- 5p** a) Să se arate că $x \circ y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** b) Să se compare numerele $a = (3^2 \circ 3^3) \circ 3^4$ și $b = 3^2 \circ (3^3 \circ 3^4)$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ \circ ” nu este asociativă pe G .
- 5p** d) Să se demonstreze că $3^m \circ 3^n = m + n + 1$, pentru oricare $m, n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** e) Să se rezolve ecuația $3^x \circ 9^x = 10$ în mulțimea G .
- 5p** f) Să se calculeze $(3^1 \circ 3^2) + (3^3 \circ 3^4) + (3^5 \circ 3^6) + \dots + (3^{11} \circ 3^{12})$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 34<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + m$, unde $m \in \mathbb{Z}$.

5p a) Să se arate că legea de compoziție "*" este asociativă.

5p b) Să se determine m astfel încât $e = -6$ să fie elementul neutru al legii "*",

5p c) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x^2 * x = m$.

5p d) Să se demonstreze că dacă m este număr strict pozitiv, atunci ecuația $x^2 * x = 0$ nu are soluții reale.

5p e) Să se calculeze $(-x) * x * y * (-y)$.

5p f) Să se determine m astfel încât $(-\sqrt{3}) * (-\sqrt{2}) * \sqrt{2} * \sqrt{3} = 6$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 35<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2009(x - 2009)(y - 2009) + 2009$.

5p a) Să se demonstreze că legea "*" este comutativă.

5p b) Să se determine $y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * y = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se determine $z \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * z = z, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p d) Să se demonstreze că $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{2009\}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{2009\}$.

5p e) Să se arate că legea "*" determină pe $\mathbb{R} \setminus \{2009\}$ o structură de grup comutativ.

5p f) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $a * b \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 36<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se definește legea de compoziție $x * y =$ ultima cifră a produsului $x \cdot y$. Se admite că legea de compoziție "*" este asociativă pe mulțimea M .

- 5p** a) Să se arate că $5 * x = 0$, pentru orice x număr par din mulțimea M .
- 5p** b) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție "*".
- 5p** c) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$.
- 5p** d) Să se determine elementele simetrizabile mulțimii M în raport cu legea "*".
- 5p** e) Se consideră mulțimea $H = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Să se arate că $x * y \in H$, pentru orice $x, y \in H$.
- 5p** f) Să se rezolve ecuația $(x * 3) * 7 = 9$, unde $x \in M$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 37<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor naturale se definește legea de compoziție $x * y = r$, unde r este restul împărțirii produsului $x \cdot y$ la 10. Se admite că legea "*" este asociativă pe \mathbb{N} . Se consideră mulțimea $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

- 5p** a) Să se arate că $10 * x = 0, \forall x \in \mathbb{N}$.
- 5p** b) Să se calculeze $5 * 5 * 5 * 5 * 5$.
- 5p** c) Să se arate că $x * y \in I$, pentru oricare $x, y \in I$.
- 5p** d) Să se demonstreze că legea "*" determină pe mulțimea $I \setminus \{5\}$ o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Să se calculeze $2 * 4 * 6 * \dots * 2008 * 2010$.
- 5p** f) Să se demonstreze că legea "*" nu admite element neutru.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 38<http://www.pro-matematica.ro>

În mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale se consideră submulțimile $M = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ și $P = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

- 5p** a) Să se demonstreze că produsul oricăror două elemente din M este tot un element al mulțimii M .
- 5p** b) Să se arate că înmulțirea numerelor raționale determină pe mulțimea M o structură de grup comutativ.
- 5p** c) Să se arate că $x \cdot y \in P$, pentru oricare $x, y \in P$.
- 5p** d) Să se determine mulțimea
 $U(P) = \{x \in P \mid x \text{ este element inversabil al mulțimii } P \text{ în raport cu înmulțirea numerelor întregi}\}.$
- 5p** e) Să se demonstreze că produsul a patru elemente din mulțimea M care au exponenți naturali consecutivi este element al mulțimii P .
- 5p** f) Să se arate că $M \cap P \neq \emptyset$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 39<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 8(x - 8)(y - 8) + 8$. Se consideră mulțimea $H = [8, +\infty)$.

- 5p** a) Să se calculeze $x * 8$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă.
- 5p** c) Să se calculeze $(-8) * (-7) * \dots * 0 * \dots * 7 * 8$.
- 5p** d) Să se arate că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.
- 5p** e) Să se arate că legea "*" admite element neutru pe mulțimea H .
- 5p** f) Să se arate că există $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $a * b \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 40<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor naturale se definește legea de compoziție $x * y = r$, unde r este restul împărțirii produsului $x \cdot y$ la 10. Se admite că legea "*" este asociativă pe \mathbb{N} . Se consideră mulțimea $P = \{2, 4, 6, 8\}$.

- 5p** a) Să se arate că $10 * x = 0, \forall x \in \mathbb{N}$.
- 5p** b) Să se calculeze $6 * 6 * 6 * 6$.
- 5p** c) Să se arate că $x * y \in P$, pentru oricare $x, y \in P$.
- 5p** d) Să se demonstreze că legea "*" determină pe mulțimea P o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Să se rezolve ecuația $(x * 2) * 4 = 8$ în mulțimea P .
- 5p** f) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \dots * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 41<http://www.pro-matematica.ro>

Fie mulțimile $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = a^2 + 2b^2, a, b \in \mathbb{Z}\}$, $H = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ și legea de compoziție definită pe mulțimea $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x * y =$ ultima cifră a numărului x^y .

5p a) Să se demonstreze că $H \subset M$.

5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{N}$ pentru care $1 = a^2 + 2b^2$.

5p c) Să se determine elementele inversabile din mulțimea M în raport cu operația de înmulțire a numerelor naturale.

5p d) Să se verifice că $9 * 2 \neq 2 * 9$.

5p e) Să se arate că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p f) Să se determine o submulțime cu două elemente a mulțimii H pe care legea "*" este comutativă.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 42<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 7(x + y) + 7^2 + 7$. Se consideră intervalul $I = [6, 8]$.

- 5p** a) Să se calculeze $7 * x$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y = (x - 7)(y - 7) + 7$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă.
- 5p** d) Să se arate că dacă $x = 6 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 6 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, atunci $x * y \in I$.
- 5p** e) Să se arate că legea "*" admite element neutru pe I .
- 5p** f) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \dots * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 43<http://www.pro-matematica.ro>

Se consideră mulțimea $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și operațiile "+" și "." de adunare și respectiv de înmulțire a numerelor reale.

5p a) Să se demonstreze că $x + y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.

5p b) Să se demonstreze că $x \cdot y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.

5p c) Să se arate că $\{0, 1\} \subset M$.

5p d) Să se arate că numărul $5 - \sqrt{2}$ nu este element inversabil al mulțimii M în raport cu operația "."

5p e) Să se arate că $(M, +)$ este grup comutativ.

5p f) Să se demonstreze că orice element al mulțimii $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$ este element inversabil în raport cu operația "." definită pe H .

SUBIECTUL II (30p)Varianta 44<http://www.pro-matematica.ro>

Pe intervalul $I = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}$. Se consideră intervalul

$$I_1 = (-\infty, 1].$$

- 5p** a) Să se calculeze $x = \sqrt{2} * (-\sqrt{2})$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y \in I_1$, pentru oricare $x, y \in I_1$.
- 5p** c) Să se verifice că legea "*" este asociativă pe I_1 .
- 5p** d) Să se verifice că $x * 1 = 1$, pentru orice $x \in I_1$.
- 5p** e) Să se arate că legea "*" nu admite element neutru pe mulțimea I_1 .
- 5p** f) Să se calculeze $(-2009) * (-2008) * \dots * (-1) * 0 * 1$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 45<http://www.pro-matematica.ro>

Pe intervalul $I = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy - 6}{x + y - 5}$. Se consideră intervalul

$$I_1 = [3, +\infty).$$

- 5p** a) Să se calculeze $\sqrt{7} * 5$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y \in I_1$, pentru oricare $x, y \in I_1$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă pe I_1 .
- 5p** d) Să se verifice că $3 * x = 3$, pentru orice $x \in I_1$.
- 5p** e) Să se arate că legea "*" nu admite element neutru pe I_1 .
- 5p** f) Să se calculeze $3 * 4 * 5 * \dots * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 46<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = x \cdot y + x + y$. Se consideră mulțimea

$$H = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- 5p** a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $(x - 1) * x = -1$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "*" admite element neutru.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă.
- 5p** d) Să se demonstreze că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.
- 5p** e) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a * x = -1$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.
- 5p** f) Să se demonstreze că dacă $x \in \mathbb{Z}$ este element simetrizabil în raport cu legea "*", atunci $x \in H$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 47<http://www.pro-matematica.ro>

Pe intervalul $I = [2, +\infty)$ se definește operația $x * y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\sqrt{5} * 3$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y \in I$, pentru oricare $x, y \in I$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă pe intervalul I .
- 5p** d) Să se verifice că $2 * x = 2$, pentru orice $x \in I$.
- 5p** e) Să se arate că legea "*" nu admite element neutru pe mulțimea I .
- 5p** f) Să se calculeze $2 * 3 * 4 * \dots * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 48<http://www.pro-matematica.ro>

Pe intervalul $I = (-\infty, 2]$ se definește operația $x * y = \frac{xy - 6}{x + y - 5}$.

- 5p** a) Să se demonstreze că dacă $x = \sqrt{3}$ și $y = -\sqrt{3}$, atunci $x * y \in I$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y \in I$, pentru oricare $x, y \in I$.
- 5p** c) Să se verifice că legea "*" este asociativă pe intervalul I .
- 5p** d) Să se verifice că $x * 2 = 2$, pentru orice $x \in I$.
- 5p** e) Să se demonstreze că legea "*" nu admite element neutru pe mulțimea I .
- 5p** f) Să se calculeze $(-2009) * (-2008) * \dots * 0 * 1 * 2$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 49<http://www.pro-matematica.ro>

Se consideră mulțimea $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și operațiile „+” și „·” de adunare și respectiv de înmulțire a numerelor reale.

- 5p** a) Să se demonstreze că $x \cdot y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $x + y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.
- 5p** c) Să se arate că mulțimea $\{0, 1\} \subset M$.
- 5p** d) Să se demonstreze că $(M, +, \cdot)$ este inel comutativ.
- 5p** e) Să se determine simetricul elementului $x = 2 - \sqrt{3} \in M$, în raport cu operația „·”.
- 5p** f) Să se determine două numere $x, y \in M \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $x \cdot y \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 50<http://www.pro-matematica.ro>

Se consideră mulțimea $M = \{a + b\sqrt{15} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și operațiile „+” și „·” de adunare și respectiv de înmulțire a numerelor reale.

- 5p** a) Să se demonstreze că $x \cdot y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $x + y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.
- 5p** c) Să se arate că mulțimea $\{0, 1\} \subset M$.
- 5p** d) Să se demonstreze că $(M, +, \cdot)$ este inel comutativ.
- 5p** e) Să se determine simetricul elementului $x = 4 - \sqrt{15} \in M$, în raport cu operația „·”.
- 5p** f) Să se determine două numere $x, y \in M \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $x \cdot y \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 51<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x \perp y = x + y - \frac{xy}{2}$.

- 5p** a) Să se calculeze $x \perp y + \frac{(2-x)(2-y)}{2} - 2$, unde $x, y \in \mathbb{Q}$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție “ \perp ” este asociativă.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea de compoziție “ \perp ” admite element neutru.
- 5p** d) Să se determine $a \in \mathbb{Q}$, astfel încât $x \perp a = a$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.
- 5p** e) Fie mulțimea $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$. Să se demonstreze că (M, \perp) este grup comutativ.
- 5p** f) Să se calculeze $(-8) \perp (-7) \perp \dots \perp (-1) \perp 0 \perp 1 \perp \dots \perp 7 \perp 8$.

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ x + y, & x < y \leq 2 \\ y - x, & x \leq 3 \text{ și } y > 2 \end{cases}$.

- 5p** a) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ \circ ” nu este comutativă.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea de compoziție „ \circ ” nu este asociativă.
- 5p** d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ \circ ” admite element neutru pe H .
- 5p** e) Să se verifice că $x \circ x = 0$, pentru orice $x \in H$.
- 5p** f) Să se calculeze $(0 \circ 1) \circ (0 \circ 2)$.

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 9xy - 3x - 3y + \frac{4}{3}$. Se consideră

mulțimea $H = \left[\frac{1}{3}, +\infty \right)$.

5p a) Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \circ a = a \circ x = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se determine $b \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \circ b = b \circ x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p d) Să se verifice că mulțimea $A = \left\{ x \in H \mid \text{există } x' \in H \text{ astfel încât } x \circ x' = x' \circ x = \frac{4}{9} \right\} = H \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

5p e) Să se demonstreze că $\left(H \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}, \circ \right)$ este grup comutativ.

5p f) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b = 2$.

SUBIECTUL II (30p)Varianta 54<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = x \cdot y + x + y$. Se consideră mulțimea $H = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

- 5p** a) Să se determine elementul neutru al legii " $*$ ".
- 5p** b) Să se verifice că dacă $x * y = (-x) * (-y)$, atunci $x + y = 0$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $x * y \in H$, pentru orice $x, y \in H$.
- 5p** d) Să se arate că $(x * y) * z = (x + 1)(y + 1)(z + 1) - 1$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- 5p** e) Să se calculeze $(2010 * 2009) * (-1)$.
- 5p** f) Să se arate că dacă $x \in \mathbb{Z}$ este element simetrizabil în raport cu legea " $*$ ", atunci $x * x = 0$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 55**<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = |x - y|$. Se consideră mulțimea

$$H = \{0, 1, 2, 3, 4\} .$$

- 5p** a) Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru orice $x, y \in H$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ \circ ” este comutativă pe H .
- 5p** c) Să se arate că legea de compoziție „ \circ ” nu este asociativă pe H .
- 5p** d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ \circ ” admite element neutru pe H .
- 5p** e) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(x^2) \circ (-1) = 10$.
- 5p** f) Să se determine numerele întregi x pentru care $x \circ 1 \leq 1$.

SUBIECTUL II (30p)Varianta 56<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $A = [0,1)$ se definește operația $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

5p a) Să se demonstreze că $x * y = \frac{2xy}{(2x-1)(2y-1)+1}$, pentru orice $x, y \in A$.

5p b) Să se arate că $x * y \in A$, pentru oricare $x, y \in A$.

5p c) Să se demonstreze că operația "*" este asociativă.

5p d) Să se demonstreze că legea de compoziție „*” admite element neutru pe A .

5p e) Să se determine mulțimea $B = \left\{ x \in A \mid \text{există } x' \in A, \text{ astfel încât } x * x' = x' * x = \frac{1}{2} \right\}$.

5p f) Să se demonstreze că $(A \setminus \{0\}, *)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 57<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește operația $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$.

- 5p** a) Să se arate că $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}$, pentru orice $x, y \in G$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** c) Să se rezolve în G ecuația $x * 2 = 2$.
- 5p** d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** e) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru pe G .
- 5p** f) Să se determine $x \in G$ pentru care există $x' \in G$, astfel încât $x * x' = x' * x = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 58**<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \perp y = xy - 4(x + y) + 20$.

5p a) Să se demonstreze că $x \perp y = (x - 4)(y - 4) + 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x \perp (x + 1) = 4$.

5p c) Să se demonstreze că $x \perp y \geq 4$ pentru oricare $x, y \in [4, +\infty)$.

5p d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ \perp ” este asociativă.

5p e) Să se arate că 5 este element neutru pentru legea de compoziție „ \perp ”.

5p f) Să se calculeze $1 \perp 2 \perp 3 \perp 4 \perp 5$.

Pe mulțimea mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5p a) Să se verifice că $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \circ \left(y^2 + \frac{1}{4}\right) \geq 0$ pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că legea „ \circ ” este asociativă.

5p c) Să se demonstreze că legea „ \circ ” admite element neutru.

5p d) Să se demonstreze că (\mathbb{R}, \circ) este grup comutativ.

5p e) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\log_2(x \circ x^2) = -2$.

5p f) Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $\left(2^n + \frac{1}{4}\right) \circ \left(2^{n+1} + \frac{1}{4}\right) = 6$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 60

<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.

- 5p** a) Să se demonstreze că „ $*$ ” este lege de compoziție asociativă.
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru pe \mathbb{Z} .
- 5p** c) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * x' = 0$.
- 5p** d) Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $3^x * 3^{x+1} = 7$.
- 5p** e) Să se calculeze $0 * (-1) * (-2) * \dots * (-13)$.
- 5p** f) Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $x * y = 1$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 61<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc următoarele legi de compoziție $a * b = a + b + ab$ și $a \circ b = a + b - ab$.

- 5p** a) Se consideră mulțimea $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -1\}$. Să se arate că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.
- 5p** b) Se consideră mulțimea $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$. Să se arate că $x \circ y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea de compoziție „ \circ ” este asociativă.
- 5p** d) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** e) Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $\left(a * \frac{1}{a}\right) \geq 3$
- 5p** f) Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $x * x = -1$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 62<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 7xy + x + y$.

5p a) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x \circ 1 = 9$.

5p b) Să se arate că $x \circ y = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se demonstreze că legea „ \circ ” este asociativă.

5p d) Să se determine elementul neutru al legii „ \circ ”.

5p e) Să se arate că numărul $-\frac{1}{7}$ este nesimetrizabil în raport cu legea „ \circ ”.

5p f) Să se calculeze $\left(-\frac{3}{7}\right) \circ \left(-\frac{2}{7}\right) \circ \left(-\frac{1}{7}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 5x + 5y + xy + 20$. Se consideră mulțimea $G = (-5, +\infty)$.

5p a) Să se arate că $x * (-5) * x = -5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in G$, există $x' \in G$ astfel încât $x * x' = x' * x = -4$.

5p d) Să se calculeze valoarea expresiei $E = \frac{3 * (-5) - 1}{(-5) * 2 + 3}$.

5p e) Folosind eventual egalitatea $x * y = (x + 5) \cdot (y + 5) - 5$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(\log_2 x) * (\log_3 x) = -5$.

5p f) Să se calculeze $(-6) * [(-5) * 2009]$.

Pe mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$.

5p a) Să se calculeze $\frac{1}{2} * \frac{1}{3}$.

5p b) Să se demonstreze că „ $*$ ” este lege de compoziție asociativă pe M .

5p c) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” admite element neutru pe M .

5p d) Să se arate că $x = 0$ este singurul element simetrizabil al mulțimii M în raport cu legea „ $*$ ”.

5p e) Să se arate că $\frac{1}{x} * \frac{1}{y} = x * y, \forall x, y \in (0, +\infty)$.

5p f) Să se calculeze valoarea expresiei $E = \frac{\left(1 * \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{7} * \frac{1}{8}\right)}{(1 * 2) \cdot (3 * 4) \cdot \dots \cdot (7 * 8)}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 65<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \log_2(2^x + 2^y + 1)$. Se consideră mulțimea $M = [0, +\infty)$.

- 5p** a) Să se arate că $x * y \in M$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p** b) Să se determine $x \in M$ astfel încât $0 * x = x + 1$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” nu admite element neutru pe M .
- 5p** d) Să se verifice că $(x * x) * x = \log_2(3 \cdot 2^x + 1)$, oricare ar fi $x \in M$.
- 5p** e) Să se demonstreze are loc relația $x * (-x) > 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** f) Să se calculeze $2^1 * 2 + 2^3 * 4$.

SUBIECTUL II (30p)Varianta 66<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = [a, +\infty)$ se definește operația $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$, cu $a \in [0, +\infty)$.

5p a) Să se calculeze $a * a - a$, unde $a \in [0, +\infty)$.

5p b) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p c) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă pe G .

5p d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru pe G .

5p e) Să se determine elementele din G , simetrizabile în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

5p f) Să se rezolve în G ecuația $(2x) * a = a * (x + a)$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 67<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = (-1,1)$ se definește operația $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$.

- 5p** a) Să se calculeze $-\frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 5p** b) Să se rezolve în mulțimea G ecuația $x * x^2 = 0$.
- 5p** c) Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** d) Să se demonstreze că $(x * y) * z = x * (y * z)$, pentru orice $x, y, z \in G$.
- 5p** e) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” admite element neutru pe G .
- 5p** f) Să se determine $x \in G$ pentru care există $x' \in G$, astfel încât $x * x' = x' * x = 0$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 68<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $A = [3, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

- 5p** a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $x * y = a(x - b)(y - b) + b$, pentru orice $x, y \in A$.
- 5p** b) Să se arate că $x * y \in A \setminus \{3\}$, pentru oricare $x, y \in A \setminus \{3\}$.
- 5p** c) Să se determine $c \in A$ pentru care are loc egalitatea $x * c = c * x = c$, oricare ar fi $x \in A$.
- 5p** d) Să se arate că $(A \setminus \{3\}, *)$ formează o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Să se rezolve ecuația $(\log_3 x^3) * (\log_9 x^6) = 3$, unde $x \in A$.
- 5p** f) Să se calculeze $[(\log_3 27) * (\log_3 81)] * [(\log_3 243) * (\log_3 729)]$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 69<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește operația $x \circ y = 1 + \log_2 x + \log_2 y$.

- 5p** a) Să se arate că $x \circ y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** b) Să se compare numerele $a = (2^2 \circ 2^3) \circ 2^4$ și $b = 2^2 \circ (2^3 \circ 2^4)$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ \circ ” nu este asociativă pe G .
- 5p** d) Să se demonstreze că pentru oricare $x, y \in G$, are loc egalitatea $2^x \circ 2^y = x + y + 1$.
- 5p** e) Să se rezolve în mulțimea G ecuația $2^x \circ 8^x = 9$.
- 5p** f) Să se calculeze $(2^1 \circ 2^2) + (2^3 \circ 2^4) + (2^5 \circ 2^6) + \dots + (2^{11} \circ 2^{12})$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 70<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $A = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x^{\lg y}$.

- 5p** a) Să se verifice că $x^{\lg y} = 10^{\lg x \cdot \lg y}$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Să se arate că $(2 \circ 10) \circ 3 = 2 \circ (10 \circ 3)$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $x \circ (y \cdot z) = (x \circ y) \cdot (x \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in A$.
- 5p** d) Să se demonstreze că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, oricare ar fi $x \in A$.
- 5p** e) Să se calculeze $\left(\frac{1}{3} \circ \frac{1}{2}\right) \circ (1 \circ 2)$.
- 5p** f) Să se rezolve în mulțimea A ecuația $(x \circ 10) \cdot (x^2 \circ 10) = 27$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 71<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + 2$.

- 5p** a) Să se calculeze $(1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ \circ ” admite element neutru pe \mathbb{R} .
- 5p** d) Să se demonstreze că pentru oricare $x \in \mathbb{R}$, există $x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ x' = -2$.
- 5p** e) Să se rezolve ecuația $x \circ x = 4x^2$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** f) Să se determine $x \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x \circ \frac{1}{x} = x \circ x$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 72<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.

- 5p** a) Să se demonstreze că pentru oricare $x \in \mathbb{R}$ are loc relația $x * x \geq -1$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se demonstreze că există $e \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * e = e * x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ formează o structură algebrică de grup comutativ.
- 5p** e) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x * (1 * x) = 1$.
- 5p** f) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x * 2 = y \\ y * 3 = x \end{cases}$, unde x și y sunt numere reale.

Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{4x + 4y}{4 + xy}$.

5p a) Să se demonstreze că $\frac{1}{2}(x * y) = \frac{(x+2)(y+2) - (x-2)(y-2)}{(x+2)(y+2) + (x-2)(y-2)}$, pentru orice $x, y \in G$.

5p b) Să se calculeze $x * (-x)$, unde $x \in G$.

5p c) Să se determine $e \in G$, astfel încât $x * e = e * x = x$, pentru orice $x \in G$.

5p d) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p e) Să se demonstreze că pentru oricare $x \in G$, există $x' \in G$ astfel încât $x * x' = x' * x = 0$.

5p f) Să se calculeze $\left(\frac{1}{8}\right) * \left(\frac{1}{7}\right) * \dots * \frac{1}{2} * \frac{1}{1} * \left(\frac{-1}{1}\right) * \left(\frac{-1}{2}\right) * \dots * \left(\frac{-1}{7}\right) * \left(\frac{-1}{8}\right)$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 74<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 1$ și

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3).$$

- 5p** a) Să se verifice că $x \circ y = \frac{(x-1)(y-1)}{2} + 1$, pentru orice $x, y \in A$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in A$.
- 5p** c) Să se arate că $x \circ 1 \circ x = 1$, oricare ar fi $x \in A$.
- 5p** d) Să se determine $x \in A$, pentru care există $x' \in A$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = 3$.
- 5p** e) Să se rezolve ecuația $(x \circ x) \circ (x \circ x) = 1$ în mulțimea A .
- 5p** f) Să se calculeze $[(-3) \circ (-1)] \circ 1$.

SUBIECTUL II (30p)Varianta 75<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x \perp y = x + y + 1$ și $x \circ y = x + y + xy$.

5p a) Să se demonstreze că $(2x - 1) \perp x^2 = x \circ x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

5p b) Să se demonstreze că legea de compoziție " \circ " este asociativă.

5p c) Să se verifice că $x \circ (-1) = (-1) \circ x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

5p d) Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $2^x \perp 2^{x+1} = 3 \circ 1$.

5p e) Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $3 \perp \log_2 x = 2 \circ \log_2 x$.

5p f) Să se calculeze $(1 - 2^4) \circ (1 - 2^3) \circ (1 - 2^2) \circ (1 - 2^1) \circ (1 - 2^0)$.

SUBIECTUL II (30p)Varianta 76<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}$.

5p a) Să se arate că $x * y = (2x - 1)(2y - 1) + \frac{1}{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se verifice dacă legea „ $*$ ” este asociativă.

5p c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.

5p d) Să se rezolve ecuația $x^2 * 3 = 0$, unde $x \in [0, \infty)$.

5p e) Să se determine numerele $x \in \mathbb{Q}$, astfel încât $x * x = \frac{1}{2}$.

5p f) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(2^x) * (2^{2x}) = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 77<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}$.

5p a) Să se calculeze $2 * \frac{4}{5}$.

5p b) Se consideră mulțimea $H = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Să se arate că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p c) Să se arate că pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ are loc relația $(x * y) * z = x * (y * z)$.

5p d) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „*”.

5p e) Să se rezolve ecuația $(2^x) * (4^x) = \frac{3}{2}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p f) Să se determine numărul real a astfel încât $x * a = a * x = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 78<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -xy + 5x + 5y - 20$.

- 5p** a) Să se arate că $x * y = (x - 5)(5 - y) + 5$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Se consideră mulțimea $G = (-\infty, 5)$. Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p** c) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** d) Să se arate că $x * 4 = 4 * x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** e) Se consideră expresia $E(x) = (x + 8) * (x - 7) - 63$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că $E(x) < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** f) Să se demonstreze că $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 79<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc operațiile $x \perp y = x + y + 2$ și $x \Delta y = xy + 2x + 2y + 2$.

- 5p** a) Să se arate că legea de compoziție „ Δ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se determine elementul neutru în raport cu legea de compoziție „ Δ ”.
- 5p** c) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \Delta (-3) = -1$.
- 5p** d) Să se demonstreze că $x \Delta (y \perp z) = (x \Delta y) \perp (x \Delta z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- 5p** e) Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $(x \perp x) \perp (x \perp x) = -x^2 + 2$.
- 5p** f) Să se calculeze $(2 \perp 2^2) \perp (2^3 \perp 2^4)$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 80<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.

- 5p** a) Să se arate că $x * y = (x + 1)(y + 1) - 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „*” este asociativă.
- 5p** d) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x * x = -1$.
- 5p** e) Să se determine $x \in (0, +\infty)$, astfel încât $(\log_2 x) * (\log_{\frac{1}{2}} x) = -1$.
- 5p** f) Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $2 * \frac{n(n-1)}{2} = 11$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 81<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + \sqrt{5}$.

- 5p** a) Să se arate că operația „ \circ ” este asociativă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se dea exemplu de două numere iraționale x și y cu proprietatea că $x \circ y$ este număr întreg.
- 5p** c) Să se calculeze elementul neutru al legii „ \circ ”.
- 5p** d) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(x^3) \circ (-x) = \sqrt{5}$.
- 5p** e) Să se arate că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \sqrt{5}$ are proprietatea:
 $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in (0, \infty)$.
- 5p** f) Să se arate că dacă x este număr natural, atunci simetricul său în raport cu legea „ \circ ” este număr irațional.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 82<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \perp y = x + y - 1$.

5p a) Să se arate că legea „ \perp ” este asociativă.

5p b) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x \perp 4^x = 5$.

5p c) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $x \perp x^2 \leq 1$.

5p d) Să se determine $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, astfel încât $1 \perp n \perp \frac{n(n-1)}{2} = 44 + n$.

5p e) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Să se arate că $f(x \perp y) = f(x) \perp f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p f) Să se calculeze $2 \perp 2^2 \perp 2^3 \perp 2^4 \perp 2^5 \perp 2^6$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 83<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y - 1$.

5p a) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p b) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a * b \in \mathbb{Z}$.

5p c) Să se arate că $((x * y) * z) * t = x + y + z + t - 3$, oricare ar fi $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

5p d) Să se determine numărul real $p = 1 * 2 * 3 * \dots * 8$.

5p e) Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} (2x + 5) * (3y - 1) = 1 \\ (x - 7) * (2y + 3) = -2 \end{cases}$$
, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

5p f) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Să se arate că $f(x * y) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 84<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -xy - x - y - 2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x * y = -(x + 1)(y + 1) - 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că $e = -2$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.

5p **d)** Să se găsească elementele simetrizabile din mulțimea \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

5p **e)** Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(x + 2) * (2x - 3) = 5$.

5p **f)** Să se rezolve inecuația $(x - 3) * (x + 1) \geq 0$, unde $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 85<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.

5p a) Să se arate că $x * y = 3(x + 2)(y + 2) - 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că legea de compoziție este asociativă.

5p c) Se consideră mulțimea $M = [-2, +\infty)$. Să se arate că $x * y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.

5p d) Să se determine elementul neutru în raport cu legea de compoziție „*”.

5p e) Se dau numerele reale $a = x * \frac{x}{3}$ și $b = \frac{x}{2} * x$. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât media aritmetică a numerelor a și b să fie egală cu 10.

5p f) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $3^x * 3^{x-1} = 19$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 86<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 7$ și

$$x \circ y = xy - 7x - 7y + 56 .$$

5p a) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p b) Să se verifice că $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $7^x * 7^{x+1} * 7^{x-1} = 43$.

5p d) Se consideră mulțimea $H = (7, +\infty)$. Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p e) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $(x-1) \circ x < 7$.

5p f) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \dots * 9$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 87<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y - 6$.

- 5p** a) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se arate că $e = 6$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Să se determine simetricul elementului (-7) în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $(x^2 + 3x - 1) * (2x^2 - x + 6) \geq 0$.
- 5p** e) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, pentru care numerele $a = 6 * 2x^2$, $b = x * \frac{x}{2}$, $c = (-11x^2) * 6$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** f) Să se demonstreze că $\frac{1}{2} * \frac{1}{2^2} * \dots * \frac{1}{2^7} < 0$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 88<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \perp y = 2xy + 10x + 10y + 45, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se demonstreze că $x \perp y = 2(x+5)(y+5) - 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se verifice că legea de compoziție „ \perp ” este asociativă pe \mathbb{R} .

5p c) Se consideră mulțimea $M = (-5, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in M$, rezultă că $x \perp y \in M$.

5p d) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $5^x \perp 3^x = -5 + 20(3^x + 5)$.

5p e) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $(x+1) \perp (x-4) < -5$.

5p f) Să se determine $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x \perp x \perp x = 2^n \cdot (x+5)^3 - 5, \forall x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 89<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

5p a) Să se arate că $x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p c) Să se verifice că $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.

5p d) Să se arate că $(\mathbb{R} \setminus \{3\}, *)$ este grup comutativ.

5p e) Se consideră mulțimea $G = (3, +\infty)$. Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p f) Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ pentru care are loc egalitatea $x * x * x = 2^n (x - 3)^3 + 3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 90<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - 6x - 6y + 14$.

- 5p** a) Să se arate că $x * y = 3(x - 2)(y - 2) + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că are loc egalitatea $(1 * x) * 3 = 1 * (x * 3)$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se verifice că $e = \frac{7}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** d) Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x * x = 3\}$.
- 5p** e) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $3 * \log_3(x^2 - 7) = 2$.
- 5p** f) Să se arate că $x = 3$ este element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 91<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 4$ și

$$x \circ y = xy - 4(x + y) + 20.$$

5p a) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p b) Să se calculeze $x \circ y - (x - 4)(y - 4) - 4$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se arate că legea de compoziție „ \circ ” este comutativă.

5p d) Să se calculeze $\sqrt{u^2 + e^2}$, unde e este element neutru pentru legea „ $*$ ”, iar u este element neutru pentru legea „ \circ ”.

5p e) Să se arate că are loc egalitatea $2 \circ (x * 3) = (2 \circ x) * (2 \circ 3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p f) Să se calculeze $2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 92<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ și

$$x \circ y = 2xy + 4x + 4y + 6.$$

5p a) Să se verifice că operația „ \circ ” este asociativă.

5p b) Să se arate că $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

5p c) Să se arate că nu există $u \in \mathbb{Z}$ pentru care $u \circ x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

5p d) Să se demonstreze că dacă $x \circ y = -2$, atunci $x = -2$ sau $y = -2$.

5p e) Să se rezolve în \mathbb{Z} inecuația $x^2 * x \leq 2$.

5p f) Dacă $a = x * x$ și $b = x \circ x$, să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\frac{a+b}{2} = -2$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 93<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ și $x \circ y = 2xy + 4x + 4y + 6$.

Se consideră mulțimea $H = [-2, +\infty)$.

- 5p** a) Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ \circ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Dacă $A = \{x \in H \mid x^2 * 3x = 0\}$ și $B = \{x \in H \mid x \circ x = 0\}$, să se calculeze $A \cap B$.
- 5p** e) Să se verifice că $(x * 1) \circ 2 = (x \circ 2) * (1 \circ 2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** f) Dacă $a = x * x$ și $b = x \circ x$, să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $\frac{a+b}{2} < 0$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 94<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \perp y = xy - x - y + 3$.

5p a) Să se verifice că $x \perp y = (x-1)(y-1) + 2$, pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că legea de compoziție “ \perp ” nu este asociativă.

5p c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x \perp x = y \\ x \perp y = xy - 2 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

5p d) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $[(2 \perp x) \perp 2] \perp x = 10$.

5p e) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $x \perp x \geq 2$.

5p f) Să se determine două numere distincte $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, astfel încât $a \perp b \in \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 95<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Fie $M = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

- 5p** a) Să se arate că $x \circ y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că dacă $x, y \in M$, atunci $x \circ y \in M$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea de compoziție „ \circ ” este asociativă pe M .
- 5p** d) Să se determine $e \in M$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in M$.
- 5p** e) Să se rezolve în M ecuația $x \circ 2 \circ x = 2$.
- 5p** f) Să se determine elementele mulțimii $A = \left\{x \in M \mid x \circ x = \frac{3}{4}\right\}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 96<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy + 2x + 2y + 1$.

- 5p** a) Să se verifice că $x * y = 2(x + 1)(y + 1) - 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că $e = -\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se arate că dacă $x * y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.
- 5p** e) Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x * x = 1$. Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.
- 5p** f) Să se arate că $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ formează o structură algebrică de grup comutativ.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 97<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + ay - b$, unde a și b sunt numere reale.

5p a) Să se verifice că $(5 * 2) - (3 * 2) = 2$.

5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care legea „ $*$ ” este comutativă.

5p c) Pentru $a = 1$, să se determine $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $e = 2009$ să fie elementul neutru al legii „ $*$ ”.

5p d) Să se arate că dacă $a = 1$, atunci operația „ $*$ ” este asociativă, oricare ar fi $b \in \mathbb{R}$.

5p e) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * x = -b$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p f) Pentru $a = 1$ și $b = 2009$ să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea „ $*$ ”.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 98<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = ax + by - 1$ și $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

- 5p** a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât legea de compoziție „ $*$ ” să fie asociativă.
- 5p** b) Să se demonstreze că $x \circ y = y \circ x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Pentru $a = b = 1$, să se arate că oricare $x \in \mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se determine elementul neutru al legii „ \circ ”.
- 5p** e) Pentru $a = b = 1$, să se arate că $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 5p** f) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Să se verifice că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 99<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 1$ și $x \circ y = x \cdot y - 1$. Se consideră mulțimea $H = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

- 5p** a) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(x * x) + (x \circ x) = 0$.
- 5p** b) Să se verifice că elementul neutru al legii „ $*$ ” este $e = -1$.
- 5p** c) Să se arate că $x * y \in H$, pentru orice $x, y \in H$.
- 5p** d) Să se arate că există $x, y \in H$ astfel încât $x \circ y \notin H$.
- 5p** e) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă pe \mathbb{R} .
- 5p** f) Să se demonstreze că $(H, *)$ este grup.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 100<http://www.pro-matematica.ro>

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.

- 5p** a) Să se arate că $x * (-x)$ este număr negativ, pentru oricare $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se studieze existența elementului neutru în raport cu legea „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x * y = 1 + xy \\ x * x = y \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** e) Să se arate că orice element $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”
- 5p** f) Să se verifice dacă $(\mathbb{R}, *)$ este grup.