SUBIECTUL II (30p) **Varianta 1**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y - 6$.

5p **a)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = 6$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea numerelor reale împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x * 4^x = 0$.

5p **e)** Pentru $a \in \mathbb{R}$, să se calculeze $m = \underbrace{a * a * ... * a}_{7\ termeni}$.

5p **f)** Să se arate că numărul $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} * \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ este număr rațional.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 2**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = (x-3)(y-3) + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = 4$.

5p **d)** Să se demonstreze că mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup.

5p **e)** Să se calculeze $m = \underbrace{5 * 5 * ... * 5}_{5\ termeni}$.

5p **f)** Să se arate că numerele $a = (5*5) - 3$, $b = (5*5*5) - 3$, $c = (5*5*5*5) - 3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 3**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x * (x+1) = x + 2$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se arate că legea ”$*$” nu admite element neutru.

5p **d)** Să se demonstreze că $|x + y| \le (x * y)\sqrt{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **e)** Să se arate că numerele $a = (1*1)^2$, $b = (1*1*1)^2$, $c = (1*1*1*1)^2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **f)** Să se arate că numărul $(1+\sqrt{7}) * (1-\sqrt{7})$ este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 4**

Pe mulțimea $G=(1,\infty)$ se definește operația $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

5p **a)** Să se verifice că $x*y=\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$, $\forall x,y\in G$.

5p **b)** Să se arate că $x*y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe G.

5p **d)** Să se verifice că legea "$*$" admite elementul neutru $e=\sqrt{2}$.

5p **e)** Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

5p **f)** Să se rezolve ecuația $x*2=5$, unde $x\in G$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 5**

Pe mulțimea $G=(0,\infty)$ se consideră legea de compoziție $x*y=x^{\log_2 y}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=2^{(\log_2 x)\cdot(\log_2 y)}$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **b)** Să se compare numerele $a=(2^2*4^2)*2^3$ și $b=(2^2\cdot 2^3)*(2^2\cdot 4^2)$

5p **c)** Să se arate că legea "$*$" este asociativă pe G.

5p **d)** Să se verifice că legea "$*$" admite elementul neutru $e=2$.

5p **e)** Să se determine simetricul elementului $x=8^3$ în raport cu legea "$*$".

5p **f)** Să se rezolve ecuația $x*x=2$, unde $x\in G$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 6**

Pe mulțimea $G=(0,\ 1)$ se definește operația $x*y=\dfrac{xy}{2xy+1-x-y}$.

5p **a)** Să se verifice că $x*y=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **b)** Să se arate că $x*y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe G.

5p **d)** Să se verifice că legea "$*$" admite elementul neutru $e=\dfrac{1}{2}$.

5p **e)** Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

5p **f)** Să se rezolve ecuația $x*\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{7}$, unde $x\in G$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 7**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

5p **a)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\mathbb{R}$ împreună cu legea ”$*$” formează o structură algebrică de grup comutativ.

5p **d)** Să se arate că înmulțirea numerelor reale este distributivă față de legea ”$*$”.

5p **e)** Să se demonstreze că $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ este corp, unde "$\cdot$" este înmulțirea pe $\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 8**

Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$. Se notează cu H mulțimea numerelor întregi impare.

5p **a)** Să se verifice că $x * y = \frac{1}{2}(x+1)(y+1) - 1$, pentru oricare $x, y \in \mathbb{Q}$.

5p **b)** Să se arate că legea ”$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = 1$.

5p **d)** Să se arate că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p **e)** Să se determine elementele $x \in H$ cu proprietatea că există $x' \in H$, astfel încât $x * x' = x' * x = 1$.

5p **f)** Să se arate că $x * \frac{1}{x} \geq 1$, pentru orice $x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 9**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2(x + y) + m$, $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se verifice că $x * y = (x-2)(y-2) + m - 4, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine m astfel încât $2009 * 2009 = 2007^2 + 2$.

5p **c)** Pentru $m = 6$ să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * a = a * x = a, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **d)** Să se determine m știind că elementul neutru al legii ”$*$” este $e = 3$.

5p **e)** Pentru $m = 6$ să se calculeze $\sqrt{1} * \sqrt{2} * ... * \sqrt{2009}$, știind că legea ”$*$” este asociativă.

5p **f)** Să se determine cea mai mică valoare a numărului m astfel încât $x * y \in [2, \infty)$, pentru orice $x, y \in [2, \infty)$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 10

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

5p **a)** Să se verifice că $x * y = 2(x-1)(y-1)+1$, pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = \frac{3}{2}$.

5p **d)** Se consideră mulțimea $G = (1, \infty)$. Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p **e)** Să se arate că $G = (1, \infty)$ împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup comutativ.

5p **f)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 11

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = -1$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea numerelor reale împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup.

5p **d)** Să se demonstreze că expresia $E(x) = x * (-x)$ nu depinde de x.

5p **e)** Să se arate că $\frac{x}{y} * \frac{y}{x} \neq 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^*$.

5p **f)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x * 4^x = \sqrt[3]{3}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 12

Pe mulțimea numerelor raționale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + a$ şi $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, cu $a \in \mathbb{Q}$.

5p **a)** Să se arate că legea ”$\circ$” este asociativă.

5p **b)** Să se verifice că legea ”$\circ$” admite elementul neutru $e = -1$.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{Q}$, astfel încât $2 \circ (3 * 1) = (2 \circ 3) * (2 \circ 1)$.

5p **d)** Să se arate că mulțimea $\mathbb{Q}$ împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup comutativ.

5p **e)** Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ pentru care are loc egalitatea $x \circ x \circ x = (x+2)^3 + m,$ oricare $x \in \mathbb{Q}$

5p **f)** Pentru $a = 2$, să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuația $x * x = x \circ x$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 13**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = x + y + 4$.

5p **a)** Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea $2^a * 2^{-a} \geq 6$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x * 2^{x+1} = 16$.

5p **c)** Să se arate că legea ”$*$” este asociativă.

5p **d)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = -4$.

5p **e)** Să se arate că mulțimea $\mathbb{R}$ împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup comutativ.

5p **f)** Să se rezolve ecuația $(\log_2 x) * \left(\log_2 x^2\right) = 7$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 14**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = xy - 6x - 6y + 42$. Fie mulțimea $G = [5, 7] \subset \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se verifice că $x * y = (x-6)(y-6) + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = 7$.

5p **d)** Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p **e)** Fie $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x * x = 7\}$. Să se arate că mulțimea M împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup comutativ.

5p **f)** Să se determine numerele întregi x şi y pentru care $x * y = 7$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 15**

Pe mulțimea $G = \left(\sqrt{2}, \infty\right)$ se defineşte operația $x * y = \sqrt{x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6}$.

5p **a)** Să se verifice că $x * y = \sqrt{(x^2-2)(y^2-2)+2}$, $\forall x, y \in G$.

5p **b)** Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă pe G.

5p **d)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = \sqrt{3}$.

5p **e)** Să se determine simetricul elementului $x = \sqrt{8}$ în raport cu legea ”$*$”.

5p **f)** Să se arate că numerele $a = (2*2)^2 - 2$, $b = (2*2*2)^2 - 2$, $c = (2*2*2*2)^2 - 2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 16**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = xy - 3x - 3y + a$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că pentru $a = 12$ legea "$\circ$" este asociativă.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că legea "$\circ$" admite elementul neutru $e = 4$.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{Q}$, astfel încât $2 \circ (3 * 1) = (2 \circ 3) * (2 \circ 1)$.

5p **d)** Să se arate că mulțimea $\mathbb{R}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup comutativ.

5p **e)** Pentru $a = 12$ să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x \circ x \circ x = (x-3)^3 + m,$ oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$

5p **f)** Pentru $a = 12$ să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * y = 2 \\ x \circ y = 1 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 17**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + 3$.

5p **a)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se verifice că legea "$*$" admite elementul neutru $e = -3$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea $\mathbb{R}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(\log_2 x) * (\log_4 x) = 6$.

5p **e)** Să se arate că numerele $a = 2 * 2 * 2$, $b = a * 2$ și $c = b * 2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **f)** Să se arate că numărul $m = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} * \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 18**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.

5p **a)** Să se verifice că $x * y = 3(x+2)(y+2) - 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că legea "$*$" admite elementul neutru $e = -\frac{5}{3}$.

5p **d)** Să se determine simetricul numărului $x = \frac{1}{3}$ în raport cu legea "$*$".

5p **e)** Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea $x * x * x = 3^n (x+2)^3 - n$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Să se arate că numerele $a = (-1) * (-1) + 2$, $b = (-1) * (-1) * (-1) + 2$, $c = (-1) * (-1) * (-1) * (-1) + 2$

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 19**

Pe mulțimea $G=(-2,2)$ se definește operația $x*y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e=0$.

5p **d)** Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup.

5p **e)** Să se arate că $x*y=\dfrac{2(x+2)(y+2)-2(2-x)(2-y)}{(x+2)(y+2)+(2-x)(2-y)}$, pentru orice $x,y\in G$.

5p **f)** Să se determine $x\in G$ pentru care $1*x=1*1*1$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 20**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-1$ și $x\circ y=\dfrac{1}{2}(xy-x-y+3)$.

5p **a)** Să se demonstreze că legea ”$\circ$” este asociativă.

5p **b)** Să se verifice că legea ”$\circ$” admite element neutru $e=3$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea ”$\circ$” este distributivă față de legea ”$*$”.

5p **d)** Să se arate că mulțimea $\mathbb{R}$ împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup comutativ.

5p **e)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $a\circ x=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ 3\circ 1=x\circ x$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 21**

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x*y=xy+2x+2y+a$, cu $a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ știind că legea ”$*$” admite element neutru.

5p **b)** Pentru $a=2$ să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă.

5p **c)** Dacă $a=2$ să se arate că $(x+y+2)*z=(x*z)+(y*z)+2$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{Z}$.

5p **d)** Pentru $a=2$ să se determine mulțimea $M=\{x\in\mathbb{Z} \mid \text{există } x'\in\mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x*x'=-1\}$.

5p **e)** Pentru $a=2$ să se determine $x,y\in\mathbb{Z}$, astfel încât $x*y=3$.

5p **f)** Fie mulțimea $H=\{-3,-1\}$. Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât, pentru oricare $x,y\in H$, să rezulte că $x*y\in H$.

SUBIECTUL II (30p) <u>**Varianta 22**</u>

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x * x = 1$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = 1$.

5p **d)** Să se determine simetricul numărului $x = \sqrt[3]{10}$ în raport cu legea ”$*$”.

5p **e)** Să se arate că numerele $a = (2 * 2)^3$, $b = (2 * 2 * 2)^3$ şi $c = (2 * 2 * 2 * 2)^3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **f)** Să se arate că numărul $m = \sqrt[3]{32} * \sqrt[3]{33}$ este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL II (30p) <u>**Varianta 23**</u>

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = 2xy + 6x + 6y + 15$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = 2(x + 3)(y + 3) - 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = -\frac{5}{2}$.

5p **d)** Se consideră mulțimea $G = (-3, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x * y \in G$.

5p **e)** Să se arate că mulțimea $G = (-3, +\infty)$ împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup.

5p **f)** Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea $x * x * x = 2^n (x + 3)^3 - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) <u>**Varianta 24**</u>

Pe mulțimea $G = (2, +\infty)$ se defineşte operația $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20}$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 4}$, $\forall x, y \in G$.

5p **b)** Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea ”$*$” este asociativă pe G.

5p **d)** Să se verifice că legea ”$*$” admite elementul neutru $e = \sqrt{5}$.

5p **e)** Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup.

5p **f)** Să se determine numerele naturale $x, y \in G$ pentru care $x * y = 8$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 25**

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 5$ şi $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.

5p **a)** Să se arate că legea ”$\circ$” este asociativă.

5p **b)** Să se verifice că legea ”$\circ$” admite elementul neutru $e = 6$.

5p **c)** Să se arate că legea ”$\circ$” este distributivă față de legea ”$*$”.

5p **d)** Să se demonstreze că $\mathbb{Z}$ împreună cu legea ”$*$” formează o structură de grup comutativ.

5p **e)** Să se arate că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel.

5p **f)** Să se determine numărul întreg x pentru care $x \circ x = x^2$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 26**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = xy - \sqrt{2}(x + y) + 2 + \sqrt{2}$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = (x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $x * \sqrt{2}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **d)** Să se determine elementul neutru al legii „$*$”.

5p **e)** Să se demonstreze că structura algebrică $(\mathbb{R}, *)$ nu este grup.

5p **f)** Să se calculeze $(-\sqrt{3}) * (-\sqrt{2}) * 1 * 0 * 1 * (\sqrt{2}) * (\sqrt{3})$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 27**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = xy - 2009(x + y) + 2009^2 + 2009$.

5p **a)** Să se arate că $x \circ y = (x - 2009)(y - 2009) + 2009$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

5p **b)** Să se demonstreze că legea „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Folosind eventual **a)** să se calculeze $2009 \circ 2009 \circ 2009 \circ 2009$.

5p **d)** Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p **e)** Se consideră mulțimea $H = [2009, +\infty)$. Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p **f)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ (x - 1) = 2009^2$.

Varianta 28

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=\frac{(x+1)(y+1)}{2}-1$ și

$$x\circ y=\begin{cases}\frac{(x+1)(y+1)}{2}-1, & x\in\mathbb{R}^* \text{ sau } y\in\mathbb{R}^* \\ 1, & x=y=0\end{cases}.$$

5p **a)** Să se demonstreze că legea de compoziție "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.
5p **b)** Să se arate că există $e\in\mathbb{R}$, astfel încât $x*e=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p **c)** Să se arate că structura algebrică $(\mathbb{R},*)$ nu este grup.
5p **d)** Să se calculeze $\underbrace{(-1)*0*1*(-1)*0*1*...*(-1)*0*1}_{201 \text{ termeni}}$.
5p **e)** Se consideră mulțimea $H=\{-1,0,1\}$. Să se arate că $x\circ y\in H$, pentru oricare $x,y\in H$.
5p **f)** Să se arate că legea "$\circ$" admite element neutru pe $H=\{-1,0,1\}$.

Varianta 29

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=\frac{xy+x+y-1}{2}$ și

$$x\circ y=\begin{cases}\frac{xy+x+y-1}{2}, & x\in\mathbb{R}^* \text{ sau } y\in\mathbb{R}^* \\ 1, & x=y=0\end{cases}.$$

5p **a)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.
5p **b)** Să se calculeze $x*(-1)$, unde $x\in\mathbb{R}$.
5p **c)** Să se calculeze $(-2009)*(-2008)*...*(-1)*0*1*...*2008*2009$.
5p **d)** Să se arate că legea „$*$" admite element neutru.
5p **e)** Se consideră mulțimea $H=\{-1,0,1\}$. Să se arate că $x\circ y\in H$, pentru oricare $x,y\in H$.
5p **f)** Să se arate că legea „$\circ$" admite element neutru pe *H*.

Varianta 30

SUBIECTUL II (30p)

Pe intervalul $I=[1,+\infty)$ se definește operația $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y\in I$, pentru oricare $x,y\in I$.
5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$" este asociativă.
5p **c)** Să se determine elementul neutru al legii „$*$".
5p **d)** Să se arate că $(x*x)^2-1=(x^2-1)^2$, pentru orice $x\in I$.
5p **e)** Să se alcătuiască tabla legii de compoziție „$*$" definită pe mulțimea $H=\{0,1,\sqrt{2}\}$.
5p **f)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $H=\{0,1,\sqrt{2}\}$ în raport cu legea „$*$" definită pe H.

Varianta 31

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 2$ şi $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.

5p **a)** Să se determine elementul neutru al legii „$*$”.

5p **b)** Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se arate că legea „$\circ$” admite element neutru pe $\mathbb{Z}$.

5p **d)** Se consideră mulţimea $H = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p **e)** Să se demonstreze că are loc egalitatea $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

5p **f)** Să se arate că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel.

Varianta 32

SUBIECTUL II (30p)

Se consideră $M = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, mulţimea tuturor resturilor obţinute prin împărţirea numerelor naturale la 8. Pe mulţimea M se definesc legile de compoziţie $x \odot y = r$, unde r este restul împărţirii produsului $x \cdot y$ la 8 şi $x \oplus y = p$, unde p este restul împărţirii sumei $(x + y)$ la 8.

Se admite că legile de compoziţie "$\odot$" şi "$\oplus$" sunt asociative.

5p **a)** Să se alcătuiască tablele legilor de compoziţie "$\odot$" şi "$\oplus$" definite pe mulţimea M.

5p **b)** Să se arate că $(5 \oplus 6) \odot 7 = (5 \odot 7) \oplus (6 \odot 7)$.

5p **c)** Să se calculeze $\underbrace{7 \odot 7 \odot ... \odot 7}_{2010 \text{ cifre}}$.

5p **d)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulţimii M în raport cu legea "$\odot$".

5p **e)** Se consideră mulţimea $H = \{0,2,4,6\}$. Să se arate că $x \oplus y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p **f)** Fie mulţimea $G = \{1,3,5,7\}$. Să se demonstreze că mulţimea G împreună cu legea de compoziţie "$\odot$" formează o structură de grup comutativ.

Varianta 33

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulţimea $G = (1, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 1 + \log_3 x + \log_3 y$.

5p **a)** Să se arate că $x \circ y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p **b)** Să se compare numerele $a = (3^2 \circ 3^3) \circ 3^4$ şi $b = 3^2 \circ (3^3 \circ 3^4)$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea „$\circ$” nu este asociativă pe G.

5p **d)** Să se demonstreze că $3^m \circ 3^n = m + n + 1$, pentru oricare $m, n \in \mathbb{N}^*$.

5p **e)** Să se rezolve ecuaţia $3^x \circ 9^x = 10$ în mulţimea G.

5p **f)** Să se calculeze $(3^1 \circ 3^2) + (3^3 \circ 3^4) + (3^5 \circ 3^6) + ... + (3^{11} \circ 3^{12})$.

Varianta 34

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y + m$, unde $m \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziţie "$*$" este asociativă.
5p **b)** Să se determine *m* astfel încât $e = -6$ să fie elementul neutru al legii "$*$",
5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^2 * x = m$.
5p **d)** Să se demonstreze că dacă *m* este număr strict pozitiv, atunci ecuaţia $x^2 * x = 0$ nu are soluţii reale.
5p **e)** Să se calculeze $(-x) * x * y * (-y)$.
5p **f)** Să se determine *m* astfel încât $\left(-\sqrt{3}\right) * \left(-\sqrt{2}\right) * \sqrt{2} * \sqrt{3} = 6$.

Varianta 35

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2009(x - 2009)(y - 2009) + 2009$.

5p **a)** Să se demonstreze că legea "$*$" este comutativă.
5p **b)** Să se determine $y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * y = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
5p **c)** Să se determine $z \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * z = z$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
5p **d)** Să se demonstreze că $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{2009\}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{2009\}$.
5p **e)** Să se arate că legea "$*$" determină pe $\mathbb{R} \setminus \{2009\}$ o structură de grup comutativ.
5p **f)** Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $a * b \in \mathbb{Z}$.

Varianta 36

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulţimea $M = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y =$ ultima cifră a produsului $x \cdot y$. Se admite că legea de compoziţie "$*$" este asociativă pe mulţimea *M*.

5p **a)** Să se arate că $5 * x = 0$, pentru orice x număr par din mulţimea *M*.
5p **b)** Să se alcătuiască tabla legii de compoziţie "$*$".
5p **c)** Să se calculeze $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$.
5p **d)** Să se determine elementele simetrizabile mulţimii *M* în raport cu legea "$*$".
5p **e)** Se consideră mulţimea $H = \{0,2,4,6,8\}$. Să se arate că $x * y \in H$, pentru orice $x, y \in H$.
5p **f)** Să se rezolve ecuaţia $(x * 3) * 7 = 9$, unde $x \in M$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 37**

Pe mulțimea numerelor naturale se definește legea de compoziție $x * y = r$, unde r este restul împărțirii produsului $x \cdot y$ la 10. Se admite că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{N}$. Se consideră mulțimea $I = \{1,3,5,7,9\}$.

5p **a)** Să se arate că $10 * x = 0, \forall x \in \mathbb{N}$.

5p **b)** Să se calculeze $5 * 5 * 5 * 5 * 5$.

5p **c)** Să se arate că $x * y \in I$, pentru oricare $x, y \in I$.

5p **d)** Să se demonstreze că legea "$*$" determină pe mulțimea $I \setminus \{5\}$ o structură de grup comutativ.

5p **e)** Să se calculeze $2 * 4 * 6 * ... * 2008 * 2010$.

5p **f)** Să se demonstreze că legea "$*$" nu admite element neutru.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 38**

În mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale se consideră submulțimile $M = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ și $P = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că produsul oricăror două elemente din *M* este tot un element al mulțimii *M*.

5p **b)** Să se arate că înmulțirea numerelor raționale determină pe mulțimea *M* o structură de grup comutativ.

5p **c)** Să se arate că $x \cdot y \in P$, pentru oricare $x, y \in P$.

5p **d)** Să se determine mulțimea
$U(P) = \{x \in P \mid x$ este element inversabil al mulțimii P în raport cu înmulțirea numerelor întregi$\}$.

5p **e)** Să se demonstreze că produsul a patru elemente din mulțimea *M* care au exponenți naturali consecutivi este element al mulțimii *P*.

5p **f)** Să se arate că $M \cap P \neq \emptyset$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 39**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 8(x-8)(y-8)+8$. Se consideră mulțimea $H = [8, +\infty)$.

5p **a)** Să se calculeze $x * 8$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

5p **c)** Să se calculeze $(-8) * (-7) * ... * 0 * ... * 7 * 8$.

5p **d)** Să se arate că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p **e)** Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe mulțimea *H*.

5p **f)** Să se arate că există $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $a * b \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 40**

Pe mulțimea numerelor naturale se definește legea de compoziție $x * y = r$, unde r este restul împărțirii produsului $x \cdot y$ la 10. Se admite că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{N}$. Se consideră mulțimea $P = \{2,4,6,8\}$.

5p **a)** Să se arate că $10 * x = 0, \forall x \in \mathbb{N}$.

5p **b)** Să se calculeze $6 * 6 * 6 * 6$.

5p **c)** Să se arate că $x * y \in P$, pentru oricare $x, y \in P$.

5p **d)** Să se demonstreze că legea "$*$" determină pe mulțimea P o structură de grup comutativ.

5p **e)** Să se rezolve ecuația $(x * 2) * 4 = 8$ în mulțimea P.

5p **f)** Să se calculeze $1 * 2 * 3 * ... * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 41**

Fie mulțimile $M = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = a^2 + 2b^2,\ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, $H = \{1,2,4,6,8,9\}$ și legea de compoziție definită pe mulțimea $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x * y =$ ultima cifră a numărului x^y.

5p **a)** Să se demonstreze că $H \subset M$.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{N}$ pentru care $1 = a^2 + 2b^2$.

5p **c)** Să se determine elementele inversabile din mulțimea M în raport cu operația de înmulțire a numerelor naturale.

5p **d)** Să se verifice că $9 * 2 \neq 2 * 9$.

5p **e)** Să se arate că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p **f)** Să se determine o submulțime cu două elemente a mulțimii H pe care legea "$*$" este comutativă.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 42**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 7(x + y) + 7^2 + 7$. Se consideră intervalul $I = [6,8]$.

5p **a)** Să se calculeze $7 * x$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $x * y = (x-7)(y-7) + 7$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

5p **d)** Să se arate că dacă $x = 6 + \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 6 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, atunci $x * y \in I$.

5p **e)** Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe I.

5p **f)** Să se calculeze $1 * 2 * 3 * ... * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 43**

Se consideră mulţimea $M = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ şi operaţiile "+" şi "$\cdot$" de adunare şi respectiv de înmulţire a numerelor reale.

5p **a)** Să se demonstreze că $x + y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x \cdot y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.

5p **c)** Să se arate că $\{0,1\} \subset M$.

5p **d)** Să se arate că numărul $5 - \sqrt{2}$ nu este element inversabil al mulţimii *M* în raport cu operaţia "$\cdot$"

5p **e)** Să se arate că $(M, +)$ este grup comutativ.

5p **f)** Să se demonstreze că orice element al mulţimii $H = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$ este element inversabil în raport cu operaţia "$\cdot$" definită pe *H*.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 44**

Pe intervalul $I = \left(-\infty, \frac{3}{2} \right)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}$. Se consideră intervalul $I_1 = (-\infty, 1]$.

5p **a)** Să se calculeze $x = \sqrt{2} * \left(-\sqrt{2} \right)$.

5p **b)** Să se arate că $x * y \in I_1$, pentru oricare $x, y \in I_1$.

5p **c)** Să se verifice că legea "$*$" este asociativă pe I_1.

5p **d)** Să se verifice că $x * 1 = 1$, pentru orice $x \in I_1$.

5p **e)** Să se arate că legea "$*$" nu admite element neutru pe mulţimea I_1.

5p **f)** Să se calculeze $(-2009) * (-2008) * \ldots * (-1) * 0 * 1$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 45**

Pe intervalul $I = \left(\frac{5}{2}, +\infty \right)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \frac{xy - 6}{x + y - 5}$. Se consideră intervalul $I_1 = [3, +\infty)$.

5p **a)** Să se calculeze $\sqrt{7} * 5$.

5p **b)** Să se arate că $x * y \in I_1$, pentru oricare $x, y \in I_1$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe I_1.

5p **d)** Să se verifice că $3 * x = 3$, pentru orice $x \in I_1$.

5p **e)** Să se arate că legea "$*$" nu admite element neutru pe I_1.

5p **f)** Să se calculeze $3 * 4 * 5 * \ldots * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 46**

Pe mulțimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziție $x * y = x \cdot y + x + y$. Se consideră mulțimea $H = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $(x-1) * x = -1$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea "$*$" admite element neutru.

5p **c)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

5p **d)** Să se demonstreze că $x * y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p **e)** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a * x = -1$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

5p **f)** Să se demonstreze că dacă $x \in \mathbb{Z}$ este element simetrizabil în raport cu legea "$*$", atunci $x \in H$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 47**

Pe intervalul $I = [2, +\infty)$ se defineşte operația $x * y = \dfrac{xy-2}{x+y-3}$.

5p **a)** Să se calculeze $\sqrt{5} * 3$.

5p **b)** Să se arate că $x * y \in I$, pentru oricare $x, y \in I$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe intervalul I.

5p **d)** Să se verifice că $2 * x = 2$, pentru orice $x \in I$.

5p **e)** Să se arate că legea "$*$" nu admite element neutru pe mulțimea I.

5p **f)** Să se calculeze $2 * 3 * 4 * \ldots * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 48**

Pe intervalul $I = (-\infty, 2]$ se defineşte operația $x * y = \dfrac{xy-6}{x+y-5}$.

5p **a)** Să se demonstreze că dacă $x = \sqrt{3}$ şi $y = -\sqrt{3}$, atunci $x * y \in I$.

5p **b)**Să se arate că $x * y \in I$, pentru oricare $x, y \in I$.

5p **c)** Să se verifice că legea "$*$" este asociativă pe intervalul I.

5p **d)** Să se verifice că $x * 2 = 2$, pentru orice $x \in I$.

5p **e)** Să se demonstreze că legea "$*$" nu admite element neutru pe mulțimea I.

5p **f)** Să se calculeze $(-2009) * (-2008) * \ldots * 0 * 1 * 2$.

Varianta 49

SUBIECTUL II (30p)

Se consideră mulţimea $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ şi operaţiile „+” şi „$\cdot$” de adunare şi respectiv de înmulţire a numerelor reale.

5p **a)** Să se demonstreze că $x \cdot y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.
5p **b)** Să se demonstreze că $x + y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.
5p **c)** Să se arate că mulţimea $\{0,1\} \subset M$.
5p **d)** Să se demonstreze că $(M,+,\cdot)$ este inel comutativ.
5p **e)** Să se determine simetricul elementului $x = 2 - \sqrt{3} \in M$, în raport cu operaţia „$\cdot$”.
5p **f)** Să se determine două numere $x, y \in M \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $x \cdot y \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

Varianta 50

SUBIECTUL II (30p)

Se consideră mulţimea $M = \{a + b\sqrt{15} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ şi operaţiile „+” şi „$\cdot$” de adunare şi respectiv de înmulţire a numerelor reale.

5p **a)** Să se demonstreze că $x \cdot y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.
5p **b)** Să se demonstreze că $x + y \in M$, pentru oricare $x, y \in M$.
5p **c)** Să se arate că mulţimea $\{0,1\} \subset M$.
5p **d)** Să se demonstreze că $(M,+,\cdot)$ este inel comutativ.
5p **e)** Să se determine simetricul elementului $x = 4 - \sqrt{15} \in M$, în raport cu operaţia „$\cdot$”.
5p **f)** Să se determine două numere $x, y \in M \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $x \cdot y \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

Varianta 51

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulţimea numerelor raţionale se defineşte legea de compoziţie $x \perp y = x + y - \frac{xy}{2}$.

5p **a)** Să se calculeze $x \perp y + \frac{(2-x)(2-y)}{2} - 2,$ unde $x, y \in \mathbb{Q}$.
5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziţie “$\perp$”este asociativă.
5p **c)** Să se demonstreze că legea de compoziţie “$\perp$” admite element neutru.
5p **d)** Să se determine $a \in \mathbb{Q}$, astfel încât $x \perp a = a,$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.
5p **e)** Fie mulţimea $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$. Să se demonstreze că $(M,\perp)$ este grup comutativ.
5p **f)** Să se calculeze $(-8) \perp (-7) \perp \ldots \perp (-1) \perp 0 \perp 1 \perp \ldots \perp 7 \perp 8.$

Varianta 52

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea $H=\{0,1,2,3,4\}$ se defineşte legea de compoziție $x\circ y=\begin{cases}x-y, & x\geq y\\ x+y, & x<y\leq 2\\ y-x, & x\leq 3 \text{ şi } y>2\end{cases}$.

5p **a)** Să se alcătuiască tabla legii de compoziție „$\circ$”.
5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$\circ$” nu este comutativă.
5p **c)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$” nu este asociativă.
5p **d)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$” admite element neutru pe H.
5p **e)** Să se verifice că $x\circ x=0$, pentru orice $x\in H$.
5p **f)** Să se calculeze $(0\circ 1)\circ(0\circ 2)$.

Varianta 53

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x\circ y=9xy-3x-3y+\frac{4}{3}$. Se consideră mulțimea $H=\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y\in H$, pentru oricare $x,y\in H$.
5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $x\circ a=a\circ x=a$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p **c)** Să se determine $b\in\mathbb{R}$, astfel încât $x\circ b=b\circ x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p **d)** Să se verifice că mulțimea $A=\left\{x\in H \mid \text{ există } x'\in H \text{ astfel încât } x\circ x'=x'\circ x=\frac{4}{9}\right\}=H\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.
5p **e)** Să se demonstreze că $\left(H\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},\circ\right)$ este grup comutativ.
5p **f)** Să se determine două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ pentru care $a\circ b=2$.

Varianta 54

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziție $x*y=x\cdot y+x+y$. Se consideră mulțimea $H=\{2k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se determine elementul neutru al legii "$*$".
5p **b)** Să se verifice că dacă $x*y=(-x)*(-y)$, atunci $x+y=0$.
5p **c)** Să se demonstreze că $x*y\in H$, pentru orice $x,y\in H$.
5p **d)** Să se arate că $(x*y)*z=(x+1)(y+1)(z+1)-1$ pentru orice $x,y,z\in\mathbb{Z}$.
5p **e)** Să se calculeze $(2010*2009)*(-1)$.
5p **f)** Să se arate că dacă $x\in\mathbb{Z}$ este element simetrizabil în raport cu legea "$*$", atunci $x*x=0$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 55**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = |x - y|$. Se consideră mulțimea $H = \{0,1,2,3,4\}$.

5p **a)** Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru orice $x, y \in H$.
5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă pe H.
5p **c)** Să se arate că legea de compoziție „$\circ$” nu este asociativă pe H.
5p **d)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$” admite element neutru pe H.
5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\left(x^2\right) \circ (-1) = 10$.
5p **f)** Să se determine numerele întregi x pentru care $x \circ 1 \le 1$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 56**

Pe mulțimea $A = [0,1)$ se definește operația $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x * y = \dfrac{2xy}{(2x-1)(2y-1)+1}$, pentru orice $x, y \in A$.
5p **b)** Să se arate că $x * y \in A$, pentru oricare $x, y \in A$.
5p **c)** Să se demonstreze că operația "$*$" este asociativă.
5p **d)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” admite element neutru pe A.
5p **e)** Să se determine mulțimea $B = \left\{ x \in A \mid \text{ există } x' \in A \text{, astfel încât } x * x' = x' * x = \dfrac{1}{2} \right\}$.
5p **f)** Să se demonstreze că $(A \setminus \{0\}, *)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 57**

Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește operația $x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$, pentru orice $x, y \in G$.
5p **b)** Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
5p **c)** Să se rezolve în G ecuația $x * 2 = 2$.
5p **d)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” este asociativă.
5p **e)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” admite element neutru pe G.
5p **f)** Să se determine $x \in G$ pentru care există $x' \in G$, astfel încât $x * x' = x' * x = \sqrt{2}$.

Varianta 58

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \perp y = xy - 4(x+y) + 20$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x \perp y = (x-4)(y-4)+4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \perp (x+1) = 4$.

5p **c)** Să se demonstreze că $x \perp y \geq 4$ pentru oricare $x, y \in [4, +\infty)$.

5p **d)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$\perp$” este asociativă.

5p **e)** Să se arate că 5 este element neutru pentru legea de compoziție „$\perp$”.

5p **f)** Să se calculeze $1 \perp 2 \perp 3 \perp 4 \perp 5$.

Varianta 59

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5p **a)** Să se verifice că $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \circ \left(y^2 + \frac{1}{4}\right) \geq 0$ pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Să se demonstreze că legea „$\circ$” admite element neutru.

5p **d)** Să se demonstreze că $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup comutativ.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2 (x \circ x^2) = -2$.

5p **f)** Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $\left(2^n + \frac{1}{4}\right) \circ \left(2^{n+1} + \frac{1}{4}\right) = 6$.

Varianta 60

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.

5p **a)** Să se demonstreze că „$*$” este lege de compoziție asociativă.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” admite element neutru pe $\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * x' = 0$.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $3^x * 3^{x+1} = 7$.

5p **e)** Să se calculeze $0 * (-1) * (-2) * ... * (-13)$.

5p **f)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x * y = 1$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 61**

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc următoarele legi de compoziție $a*b=a+b+ab$ şi $a\circ b=a+b-ab$.

5p **a)** Se consideră mulțimea $H=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\geq -1\}$. Să se arate că $x*y\in H$, pentru oricare $x,y\in H$.

5p **b)** Se consideră mulțimea $G=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\leq 1\}$. Să se arate că $x\circ y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **d)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$” .

5p **e)** Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $\left(a*\frac{1}{a}\right)\geq 3$

5p **f)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x*x=-1$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 62**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x\circ y=7xy+x+y$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ 1=9$.

5p **b)** Să se arate că $x\circ y=7\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(y+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea „$\circ$” este asociativă.

5p **d)** Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p **e)** Să se arate că numărul $-\frac{1}{7}$ este nesimetrizabil în raport cu legea „$\circ$”.

5p **f)** Să se calculeze $\left(-\frac{3}{7}\right)\circ\left(-\frac{2}{7}\right)\circ\left(-\frac{1}{7}\right)$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 63**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=5x+5y+xy+20$. Se consideră mulțimea $G=(-5,+\infty)$.

5p **a)** Să se arate că $x*(-5)*x=-5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $x*y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $x\in G$, există $x'\in G$ astfel încât $x*x'=x'*x=-4$.

5p **d)** Să se calculeze valoarea expresiei $E=\frac{3*(-5)-1}{(-5)*2+3}$.

5p **e)** Folosind eventual egalitatea $x*y=(x+5)\cdot(y+5)-5$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(\log_2 x)*(\log_3 x)=-5$.

5p **f)** Să se calculeze $(-6)*[(-5)*2009]$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 64**

Pe mulțimea $M=[0,\infty)$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

5p **a)** Să se calculeze $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Să se demonstreze că „$*$” este lege de compoziție asociativă pe M.

5p **c)** Să se demonstreze că legea „$*$” admite element neutru pe M.

5p **d)** Să se arate că $x=0$ este singurul element simetrizabil al mulțimii M în raport cu legea "$*$".

5p **e)** Să se arate că $\dfrac{1}{x}*\dfrac{1}{y}=x*y,\ \forall x,y\in(0,+\infty)$.

5p **f)** Să se calculeze valoarea expresiei $E=\dfrac{\left(1*\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}*\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{7}*\frac{1}{8}\right)}{(1*2)\cdot(3*4)\cdot\ldots\cdot(7*8)}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 65**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=\log_2\left(2^x+2^y+1\right)$. Se consideră mulțimea $M=[0,+\infty)$.

5p **a)** Să se arate că $x*y\in M$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Să se determine $x\in M$ astfel încât $0*x=x+1$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea „$*$” nu admite element neutru pe M.

5p **d)** Să se verifice că $(x*x)*x=\log_2\left(3\cdot 2^x+1\right)$, oricare ar fi $x\in M$.

5p **e)** Să se demonstreze are loc relația $x*(-x)>1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se calculeze $2^{1*2}+2^{3*4}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 66**

Pe mulțimea $G=[a,+\infty)$ se defineşte operația $x*y=\sqrt{x^2+y^2-a^2}$, cu $a\in[0,+\infty)$.

5p **a)** Să se calculeze $a*a-a$, unde $a\in[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $x*y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” este asociativă pe G.

5p **d)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” admite element neutru pe G.

5p **e)** Să se determine elementele din G, simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **f)** Să se rezolve în G ecuația $(2x)*a=a*(x+a)$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 67**

Pe mulţimea $G=(-1,1)$ se defineşte operaţia $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

5p **a)** Să se calculeze $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}*\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5p **b)** Să se rezolve în mulţimea G ecuaţia $x*x^2=0$.

5p **c)** Să se arate că $x*y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **d)** Să se demonstreze că $(x*y)*z=x*(y*z)$, pentru orice $x,y,z\in G$.

5p **e)** Să se demonstreze că legea „$*$” admite element neutru pe G.

5p **f)** Să se determine $x\in G$ pentru care există $x'\in G$, astfel încât $x*x'=x'*x=0$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 68**

Pe mulţimea $A=[3,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $x*y=a(x-b)(y-b)+b$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **b)** Să se arate că $x*y\in A\setminus\{3\}$, pentru oricare $x,y\in A\setminus\{3\}$.

5p **c)** Să se determine $c\in A$ pentru care are loc egalitatea $x*c=c*x=c$, oricare ar fi $x\in A$.

5p **d)** Să se arate că $(A\setminus\{3\},*)$ formează o structură de grup comutativ.

5p **e)** Să se rezolve ecuaţia $(\log_3 x^3)*(\log_9 x^6)=3$, unde $x\in A$.

5p **f)** Să se calculeze $[(\log_3 27)*(\log_3 81)]*[(\log_3 243)*(\log_3 729)]$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 69**

Pe mulţimea $G=(1,+\infty)$ se defineşte operaţia $x\circ y=1+\log_2 x+\log_2 y$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **b)** Să se compare numerele $a=(2^2\circ 2^3)\circ 2^4$ şi $b=2^2\circ(2^3\circ 2^4)$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea „$\circ$” nu este asociativă pe G.

5p **d)** Să se demonstreze că pentru oricare $x,y\in G$, are loc egalitatea $2^x\circ 2^y=x+y+1$.

5p **e)** Să se rezolve în mulţimea G ecuaţia $2^x\circ 8^x=9$.

5p **f)** Să se calculeze $(2^1\circ 2^2)+(2^3\circ 2^4)+(2^5\circ 2^6)+...+(2^{11}\circ 2^{12})$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 70**

Pe mulţimea $A=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x^{\lg y}$.

5p **a)** Să se verifice că $x^{\lg y} = 10^{\lg x \cdot \lg y}$, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $(2 \circ 10) \circ 3 = 2 \circ (10 \circ 3)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $x \circ (y \cdot z) = (x \circ y) \cdot (x \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in A$.

5p **d)** Să se demonstreze că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, oricare ar fi $x \in A$.

5p **e)** Să se calculeze $\left(\frac{1}{3} \circ \frac{1}{2}\right) \circ (1 \circ 2)$.

5p **f)** Să se rezolve în mulţimea A ecuaţia $(x \circ 10) \cdot \left(x^2 \circ 10\right) = 27$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 71**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x + y + 2$.

5p **a)** Să se calculeze $(1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea „$\circ$” admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

5p **d)** Să se demonstreze că pentru oricare $x \in \mathbb{R}$, există $x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ x' = -2$.

5p **e)** Să se rezolve ecuaţia $x \circ x = 4x^2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Să se determine $x \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x \circ \frac{1}{x} = x \circ x$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 72**

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = xy + x + y$.

5p **a)** Să se demonstreze că pentru oricare $x \in \mathbb{R}$ are loc relaţia $x * x \geq -1$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se demonstreze că există $e \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * e = e * x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p **d)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ formează o structură algebrică de grup comutativ.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * (1 * x) = 1$.

5p **f)** Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x * 2 = y \\ y * 3 = x \end{cases}$, unde x şi y sunt numere reale.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 73**

Pe mulțimea $G=(-2,2)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{4x+4y}{4+xy}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}(x*y)=\dfrac{(x+2)(y+2)-(x-2)(y-2)}{(x+2)(y+2)+(x-2)(y-2)}$, pentru orice $x,y\in G$.

5p **b)** Să se calculeze $x*(-x)$, unde $x\in G$.

5p **c)** Să se determine $e\in G$, astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice $x\in G$.

5p **d)** Să se arate că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

5p **e)** Să se demonstreze că pentru oricare $x\in G$, există $x'\in G$ astfel încât $x*x'=x'*x=0$.

5p **f)** Să se calculeze $\left(\dfrac{1}{8}\right)*\left(\dfrac{1}{7}\right)*\ldots*\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{1}*\left(\dfrac{-1}{1}\right)*\left(\dfrac{-1}{2}\right)*\ldots*\left(\dfrac{-1}{7}\right)*\left(\dfrac{-1}{8}\right)$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 74**

Pe mulțimea $A=\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$ se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-1$ și $x\circ y=\dfrac{1}{2}(xy-x-y+3)$.

5p **a)** Să se verifice că $x\circ y=\dfrac{(x-1)(y-1)}{2}+1,$ pentru orice $x,y\in A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$, pentru orice $x,y,z\in A$.

5p **c)** Să se arate că $x\circ 1\circ x=1$, oricare ar fi $x\in A$.

5p **d)** Să se determine $x\in A$, pentru care există $x'\in A$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=3$.

5p **e)** Să se rezolve ecuația $(x\circ x)\circ(x\circ x)=1$ în mulțimea A.

5p **f)** Să se calculeze $[(-3)\circ(-1)]\circ 1$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 75**

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x\perp y=x+y+1$ și $x\circ y=x+y+xy$.

5p **a)** Să se demonstreze că $(2x-1)\perp x^2=x\circ x,$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziție "$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că $x\circ(-1)=(-1)\circ x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $2^x\perp 2^{x+1}=3\circ 1$.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $3\perp\log_2 x=2\circ\log_2 x$.

5p **f)** Să se calculeze $(1-2^4)\circ(1-2^3)\circ(1-2^2)\circ(1-2^1)\circ(1-2^0)$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 76**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=4xy-2x-2y+\frac{3}{2}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se verifice dacă legea „$*$" este asociativă.

5p **c)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

5p **d)** Să se rezolve ecuația $x^2*3=0$, unde $x\in[0,\infty)$.

5p **e)** Să se determine numerele $x\in\mathbb{Q}$, astfel încât $x*x=\frac{1}{2}$.

5p **f)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\left(2^x\right)*\left(2^{2x}\right)=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 77**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=4xy-2x-2y+\frac{3}{2}$.

5p **a)** Să se calculeze $2*\frac{4}{5}$.

5p **b)** Se consideră mulțimea $H=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. Să se arate că $x*y\in H$, pentru oricare $x,y\in H$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$ are loc relația $(x*y)*z=x*(y*z)$.

5p **d)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

5p **e)** Să se rezolve ecuația $\left(2^x\right)*\left(4^x\right)=\frac{3}{2}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se determine numărul real *a* astfel încât $x*a=a*x=a$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 78**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-xy+5x+5y-20$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=(x-5)(5-y)+5$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Se consideră mulțimea $G=(-\infty,5)$. Să se arate că $x*y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

5p **d)** Să se arate că $x*4=4*x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Se consideră expresia $E(x)=(x+8)*(x-7)-63$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Să se demonstreze că $E(x)<0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se demonstreze că $(\mathbb{R}\setminus\{5\},*)$ este grup comutativ.

Varianta 79

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc operațiile $x \perp y = x + y + 2$ şi $x \Delta y = xy + 2x + 2y + 2$.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziție „Δ” este asociativă.

5p **b)** Să se determine elementul neutru în raport cu legea de compoziție „Δ”.

5p **c)** Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \Delta (-3) = -1$.

5p **d)** Să se demonstreze că $x \Delta (y \perp z) = (x \Delta y) \perp (x \Delta z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $(x \perp x) \perp (x \perp x) = -x^2 + 2$.

5p **f)** Să se calculeze $\left(2 \perp 2^2\right) \perp \left(2^3 \perp 2^4\right)$.

Varianta 80

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = (x+1)(y+1) - 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x * x = -1$.

5p **e)** Să se determine $x \in (0, +\infty)$, astfel încât $(\log_2 x) * (\log_{\frac{1}{2}} x) = -1$.

5p **f)** Să se determine $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, astfel încât $2 * \dfrac{n(n-1)}{2} = 11$.

Varianta 81

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = x + y + \sqrt{5}$.

5p **a)** Să se arate că operația „$\circ$” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se dea exemplu de două numere iraționale x şi y cu proprietatea că $x \circ y$ este număr întreg.

5p **c)** Să se calculeze elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(x^3) \circ (-x) = \sqrt{5}$.

5p **e)** Să se arate că funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \sqrt{5}$ are proprietatea:

$f(xy) = f(x) \circ f(y),\ \forall x, y \in (0, \infty)$.

5p **f)** Să se arate că dacă x este număr natural, atunci simetricul său în raport cu legea „$\circ$” este număr irațional.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 82**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \perp y = x + y - 1$.

5p **a)** Să se arate că legea „$\perp$" este asociativă.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x \perp 4^x = 5$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x \perp x^2 \le 1$.

5p **d)** Să se determine $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$, astfel încât $1 \perp n \perp \dfrac{n(n-1)}{2} = 44 + n$.

5p **e)** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$. Să se arate că $f(x \perp y) = f(x) \perp f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Să se calculeze $2 \perp 2^2 \perp 2^3 \perp 2^4 \perp 2^5 \perp 2^6$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 83**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y - 1$.

5p **a)** Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a * b \in \mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se arate că $((x * y) * z) * t = x + y + z + t - 3$, oricare ar fi $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

5p **d)** Să se determine numărul real $p = 1 * 2 * 3 * ... * 8$.

5p **e)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} (2x+5)*(3y-1) = 1 \\ (x-7)*(2y+3) = -2 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$. Să se arate că $f(x * y) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 84**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = -xy - x - y - 2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x * y = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziţie „* " este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că $e = -2$ este elementul neutru al legii de compoziţie „* ".

5p **d)** Să se găsească elementele simetrizabile din mulţimea $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie „* ".

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x+2)*(2x-3) = 5$.

5p **f)** Să se rezolve inecuaţia $(x-3)*(x+1) \ge 0$, unde $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 85**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy+6x+6y+10$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=3(x+2)(y+2)-2$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziţie este asociativă.

5p **c)** Se consideră mulţimea $M=[-2,+\infty)$. Să se arate că $x*y\in M$, pentru oricare $x,y\in M$.

5p **d)** Să se determine elementul neutru în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

5p **e)** Se dau numerele reale $a=x*\frac{x}{3}$ şi $b=\frac{x}{2}*x$. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, astfel încât media aritmetică a numerelor a şi b să fie egală cu 10.

5p **f)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^x*3^{x-1}=19$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 86**

Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-7$ şi $x\circ y=xy-7x-7y+56$.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se verifice că $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $7^x*7^{x+1}*7^{x-1}=43$.

5p **d)** Se consideră mulţimea $H=(7,+\infty)$. Să se arate că $x\circ y\in H$, pentru oricare $x,y\in H$.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $(x-1)\circ x<7$.

5p **f)** Să se calculeze $1*2*3*...*9$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 87**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y-6$.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se arate că $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **c)** Să se determine simetricul elementului (-7) în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\left(x^2+3x-1\right)*\left(2x^2-x+6\right)\geq 0$.

5p **e)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$, pentru care numerele $a=6*2x^2$, $b=x*\frac{x}{2}$, $c=\left(-11x^2\right)*6$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **f)** Să se demonstreze că $\frac{1}{2}*\frac{1}{2^2}*...*\frac{1}{2^7}<0$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 88**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \perp y = 2xy + 10x + 10y + 45,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x \perp y = 2(x+5)(y+5) - 5,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se verifice că legea de compoziție „$\perp$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Se consideră mulțimea $M = (-5, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in M$, rezultă că $x \perp y \in M$.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $5^x \perp 3^x = -5 + 20\left(3^x + 5\right)$.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $(x+1) \perp (x-4) < -5$.

5p **f)** Să se determine $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x \perp x \perp x = 2^n \cdot (x+5)^3 - 5,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 89**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$"este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

5p **d)** Să se arate că $(\mathbb{R} \setminus \{3\}, *)$ este grup comutativ.

5p **e)** Se consideră mulțimea $G = (3, +\infty)$. Să se arate că $x * y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p **f)** Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ pentru care are loc egalitatea $x * x * x = 2^n (x-3)^3 + 3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 90**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = 3xy - 6x - 6y + 14$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = 3(x-2)(y-2) + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că are loc egalitatea $(1 * x) * 3 = 1 * (x * 3)$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se verifice că $e = \frac{7}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

5p **d)** Să se determine mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x * x = 3\right\}$.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3 * \log_3\left(x^2 - 7\right) = 2$.

5p **f)** Să se arate că $x = 3$ este element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$*$".

Varianta 91

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 4$ şi $x \circ y = xy - 4(x + y) + 20$.

5p **a)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se calculeze $x \circ y - (x - 4)(y - 4) - 4$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **d)** Să se calculeze $\sqrt{u^2 + e^2}$, unde e este element neutru pentru legea „$*$”, iar u este element neutru pentru legea „$\circ$”.

5p **e)** Să se arate că are loc egalitatea $2 \circ (x * 3) = (2 \circ x) * (2 \circ 3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Să se calculeze $2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2$.

Varianta 92

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ şi $x \circ y = 2xy + 4x + 4y + 6$.

5p **a)** Să se verifice că operația „$\circ$” este asociativă.

5p **b)** Să se arate că $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se arate că nu există $u \in \mathbb{Z}$ pentru care $u \circ x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

5p **d)** Să se demonstreze că dacă $x \circ y = -2$, atunci $x = -2$ sau $y = -2$.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuația $x^2 * x \le 2$.

5p **f)** Dacă $a = x * x$ şi $b = x \circ x$, să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\frac{a+b}{2} = -2$.

Varianta 93

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ şi $x \circ y = 2xy + 4x + 4y + 6$.

Se consideră mulțimea $H = [-2, +\infty)$.

5p **a)** Să se arate că $x \circ y \in H$, pentru oricare $x, y \in H$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **d)** Dacă $A = \{x \in H \mid x^2 * 3x = 0\}$ şi $B = \{x \in H \mid x \circ x = 0\}$, să se calculeze $A \cap B$.

5p **e)** Să se verifice că $(x * 1) \circ 2 = (x \circ 2) * (1 \circ 2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Dacă $a = x * x$ şi $b = x \circ x$, să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{a+b}{2} < 0$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 94**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \perp y = xy - x - y + 3$.

5p **a)** Să se verifice că $x \perp y = (x-1)(y-1)+2$, pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziţie "$\perp$" nu este asociativă.

5p **c)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x \perp x = y \\ x \perp y = xy - 2 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left[(2 \perp x) \perp 2\right] \perp x = 10$.

5p **e)** Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $x \perp x \geq 2$.

5p **f)** Să se determine două numere distincte $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, astfel încât $a \perp b \in \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 95**

Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Fie $M = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

5p **a)** Să se arate că $x \circ y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că dacă $x, y \in M$, atunci $x \circ y \in M$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă pe *M*.

5p **d)** Să se determine $e \in M$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x,\ \forall x \in M$.

5p **e)** Să se rezolve în *M* ecuaţia $x \circ 2 \circ x = 2$.

5p **f)** Să se determine elementele mulţimii $A = \left\{x \in M \mid x \circ x = \frac{3}{4}\right\}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 96**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy + 2x + 2y + 1$.

5p **a)** Să se verifice că $x * y = 2(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se verifice că $e = -\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **d)** Să se arate că dacă $x * y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.

5p **e)** Fie x_1 şi x_2 soluţiile reale ale ecuaţiei $x * x = 1$. Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.

5p **f)** Să se arate că $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ formează o structură algebrică de grup comutativ.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 97**

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = x + ay - b,$ unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Să se verifice că $(5*2)-(3*2)=2$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care legea „$*$" este comutativă.

5p **c)** Pentru $a=1$, să se determine $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $e=2009$ să fie elementul neutru al legii „$*$".

5p **d)** Să se arate că dacă $a=1$, atunci operația „$*$" este asociativă, oricare ar fi $b \in \mathbb{R}$.

5p **e)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * x = -b$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Pentru $a=1$ şi $b=2009$ să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea „$*$".

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 98**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = ax + by - 1$ şi $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât legea de compoziție „$*$" să fie asociativă.

5p **b)** Să se demonstreze că $x \circ y = y \circ x,$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $a=b=1$, să se arate că oricare $x \in \mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$*$".

5p **d)** Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$".

5p **e)** Pentru $a=b=1$, să se arate că $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z),$ oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Să se verifice că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 99**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 1$ şi $x \circ y = x \cdot y - 1$. Se consideră mulțimea $H = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(x * x) + (x \circ x) = 0$.

5p **b)** Să se verifice că elementul neutru al legii „$*$" este $e = -1$.

5p **c)** Să se arate că $x * y \in H$, pentru orice $x, y \in H$.

5p **d)** Să se arate că există $x, y \in H$ astfel încât $x \circ y \notin H$.

5p **e)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se demonstreze că $(H, *)$ este grup.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 100**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy + x + y$.

5p **a)** Să se arate că $x * (-x)$ este număr negativ, pentru oricare $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se studieze existenţa elementului neutru în raport cu legea „$*$”.

5p **d)** Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x * y = 1 + xy \\ x * x = y \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **e)** Să se arate că orice element $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziţie „$*$”

5p **f)** Să se verifice dacă $(\mathbb{R}, *)$ este grup.