SUBIECTUL III (30p) **Varianta 1**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -2 & a & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=-1$, să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\det(A)=0$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, ştiind că $A^2+A=O_3$.

5p **d)** Pentru $a=-1$ să se calculeze $B-AB$.

5p **e)** Să se demonstreze că matricea $B-I_3$ este inversabilă.

5p **f)** Pentru $a=1$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 2**

Fie mulțimea de matrice $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea nulă $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A(a),\ A(b)\in M$, atunci $A(a)\cdot A(b)\in M$.

5p **d)** Să se arate că $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$, pentru oricare matrice $A(a),\ A(b)\in M$.

5p **e)** Să se arate ca există o matrice $A(e)\in M$, cu proprietatea că $A(a)\cdot A(e)=A(a),\ \forall A(a)\in M$.

5p **f)** Să se demonstreze că $2A(xy)=A(x)\cdot A(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 3**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=2$, să se determine matricea $A^2-3A+5I_3$.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A)=3$.

5p **c)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care matricea A este inversabilă.

5p **d)** Pentru $a=0$ să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Pentru $a=0$ să se rezolve ecuația matricială $AX=B$.

5p **f)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care are loc egalitatea $AC=CA$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 4**

Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = M + aI_2$, $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea A.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = 16$.

5p **c)** Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **d)** Pentru $a = 1$, să se rezolve ecuația matricială $AX = M$.

5p **e)** Să se arate că $A^2 = 2aA - a^2 I_2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Să se determine matricea $A^3 - a^2\left(3 \cdot M + a \cdot I_2\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 5**

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea $M = AB + BA$.

5p **b)** Pentru $a = 2$, să se determine valorile parametrului real b, pentru care $\det(A) = 5$.

5p **c)** Pentru $b = 1$, să se determine valorile parametrului real a, pentru care matricea A este inversabilă.

5p **d)** Știind că parametrii reali a și b verifică relația $b \neq 6a$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Pentru $a = 0$ şi $b = 1$, să se rezolve ecuația matricială $AXB = C$.

5p **f)** Pentru $a \neq 0$, să se determine perechile de numere reale (a, b), pentru care relația $AB = BA$ este adevărată.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 6**

Fie matricele $M = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = M + 2a \cdot I_2$, $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea A.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = 16$.

5p **c)** Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **d)** Pentru $a = \frac{1}{2}$, să se rezolve ecuația matriceală $AX = M$.

5p **e)** Să se arate că $A^2 = 4aA - 4a^2 I_2$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Să se determine matricea $A^3 - 4a^2\left(3M + 2a \cdot I_2\right)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 7**

Fie mulțimea de matrice $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \; a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .

5p **b)** Să se calculeze $\det(A(a))$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A(a),A(b)\in M$, atunci $A(a)\cdot A(b)\in M$.

5p **d)** Să se arate că dacă $A(a),A(b)\in M$, atunci are loc egalitatea $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$.

5p **e)** Să se arate ca există o matrice $A(e)\in M$, cu proprietatea că $A(a)\cdot A(e)=A(a),\ \forall A(a)\in M$.

5p **f)** Să se arate că $A(2xy)=A(x)\cdot A(y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 8**

Fie sistemul de ecuații (S) $\begin{cases} ax+y+3z=11 \\ y-az=-1 \\ x+3y+z=12 \end{cases}$ unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine A^2 .

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **c)** Pentru $a=0$ să se calculeze A^2-3A.

5p **d)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care tripletul $(1,3,2)$ verifică prima ecuație a sistemului (S).

5p **e)** Să se determine valorile parametrului real a , pentru care sistemul (S) admite soluție unică.

5p **f)** Pentru $a=2$, să se determine soluția sistemului (S).

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 9**

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$, unde a și b sunt parametri reali.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Pentru $b=5$, să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A)=17$.

5p **c)** Pentru $a=2$, să se determine valorile parametrului real b pentru care matricea A este inversabilă.

5p **d)** Pentru $a=2$ și $b=1$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Fie ecuația de gradul al doilea $x^2-x-5=0$ ale cărei soluții sunt x_1 şi x_2 . Dacă $a=x_1$ şi $b=x_2$ să se calculeze determinantul matricei A.

5p **f)** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+2z=8 \\ 3x+y+z=10 \\ x=2 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 10**

Fie matricele $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=M-3aI_2$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea A.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A)=36$.

5p **c)** Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **d)** Pentru $a=\frac{1}{3}$, să se rezolve ecuația matricială $AX=M$.

5p **e)** Să se arate că $A^2=-6aA-9a^2I_2$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se determine matricea $A^3-27a^2\left(M-aI_2\right)$, unde $a\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 11**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -a & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 6 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=0$, să se determine matricea $A^2+2A-4I_3$.

5p **b)** Pentru $a=0$, să se calculeze determinantul matricei A.

5p **c)** Pentru $a\in\mathbb{R}$, să se calculeze determinantul matricei A.

5p **d)** Să se determine valorile lui a pentru care matricea A este inversabilă.

5p **e)** Pentru $a=0$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **f)** Pentru $a=0$, să se rezolve ecuația matricială $A^2+X=B$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 12**

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 2\\ 0 & 1 & b\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$, unde a şi b sunt parametri reali.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Pentru $b=3$, să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A)=-12$.

5p **c)** Pentru $a=1$, să se determine valorile parametrului real b pentru care matricea A este inversabilă.

5p **d)** Pentru $a=1$ şi $b=0$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Fie ecuația de gradul al doilea $x^2-2x-3=0$ ale cărei soluții sunt x_1 şi x_2. Dacă $a=x_1$ şi $b=x_2$ să se calculeze determinantul matricei A.

5p **f)** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+2z=8\\ y=3\\ 2x+3y+2z=15\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 13

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea $M=AB-BA$.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real b, pentru care $\det(A)=6$.

5p **c)** Pentru $b=1$, să se arate că matricea A este inversabilă, $\forall a\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Pentru $b\neq 0$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Pentru $a=1$ şi $b=1$, să se rezolve ecuația matricială $AXB=C$.

5p **f)** Să se determine perechile de numere reale (a,b) pentru care relația $AB=BA$ este adevărată.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 14

Fie matricele $M=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=M+3a\cdot I_2$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se verifice că matricea $A=\begin{pmatrix}3a+4 & -2\\ 8 & 3a-4\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a, pentru care $\det(A)=9$.

5p **c)** Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **d)** Pentru $a=\frac{1}{3}$, să se rezolve ecuația matricială $AX=M$.

5p **e)** Să se verifice că $A^2=6aA-9a^2I_2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se arate că $A^3=27a^2\left(M+aI_2\right)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 15

Fie mulțimea de matrice $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle|\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ aparține mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că pentru oricare $a\in\mathbb{R}$ matricea $A(a)\in M$ este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că dacă $A(a),A(b)\in M$, atunci $A(a)\cdot A(b)\in M$.

5p **d)** Să se arate că dacă $A(a),A(b)\in M$, atunci $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$.

5p **e)** Să se arate ca există o matrice $A(e)\in M$, cu proprietatea că $A(a)\cdot A(e)=A(a)$, orcare ar fi $A(a)\in M$.

5p **f)** Să se arate că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 16

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ -3 & a & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde a şi b sunt parametri reali.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Pentru $b=2$, să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A)=17$.

5p **c)** Pentru $a=1$, să se determine valorile parametrului real b pentru care matricea A este inversabilă.

5p **d)** Pentru $a=1$ şi $b=1$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Fie ecuaţia de gradul al doilea $x^2-5x-8=0$ ale cărei soluţii sunt x_1 şi x_2. Dacă $a=x_1$ şi $b=x_2$ să se calculeze determinantul matricei A.

5p **f)** Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+2z=7 \\ -3x+y+2z=3 \\ x+y+3z=9 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 17

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 2b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea $M=AB-BA$.

5p **b)** Pentru $a=2$, să se determine valorile parametrului real b, pentru care $\det(A)=-6$.

5p **c)** Pentru $b=2$ să se determine valorile parametrului real a, pentru care matricea A este inversabilă.

5p **d)** Dacă parametrii reali a şi b verifică relaţia $b\neq 2a$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Pentru $a=0$ şi $b=\frac{1}{2}$, să se rezolve ecuaţia matricială $AXB=C$.

5p **f)** Să se determine perechile de numere reale (a,b) pentru care relaţia $AB=BA$ este adevărată.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 18

Fie sistemul (S)$\begin{cases} x-ay+2z=6 \\ 2x+y=7 \\ 2ax+y+3z=13 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea A^2.

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **c)** Pentru $a=0$, să se determine matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $B-2A=A^2$.

5p **d)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care tripletul $(3,1,2)$ verifică prima ecuaţie a sistemului (S).

5p **e)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care sistemul (S) admite soluţie unică.

5p **f)** Pentru $a=1$, să se determine soluţia sistemului (S).

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 19**

Fie mulțimea de matrice $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{R} \right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ matricea $A(a) \in M$ este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că dacă $A(a), A(b) \in M$, atunci $A(a) \cdot A(b) \in M$.

5p **d)** Să se arate că dacă $A(a), A(b) \in M$, atunci $A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a)$.

5p **e)** Să se arate ca există o matrice $A(e) \in M$, cu proprietatea că $A(a) \cdot A(e) = A(a)$, pentru orice $A(a) \in M$.

5p **f)** Să se arate că $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 20**

Fie sistemul (S) $\begin{cases} -3x + 2y + az = -2 \\ ax + z = 7 \\ x + y + 3z = 10 \end{cases}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea A^2.

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **c)** Pentru $a = 0$, să se determine matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică relația $5A + B = A^2$.

5p **d)** Să se determine valorile parametrului real a, pentru care tripletul $(2, -1, 3)$ verifică prima ecuație a sistemului (S).

5p **e)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care sistemul (S) admite soluție unică.

5p **f)** Pentru $a = 2$, să se determine soluția sistemului (S).

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 21**

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a = 1$, să se determine matricea $A^2 - 2A + 3I_3$.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a, pentru care $\det(A) = a - 3$.

5p **c)** Să se determine valorile parametrului real a, pentru care matricea A este inversabilă.

5p **d)** Pentru $a = 0$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Pentru $a = 0$, să se rezolve ecuația matricială $AX = B$.

5p **f)** Să se determine valorile parametrului a pentru care are loc egalitatea $AC = CA$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 22

Fie sistemul (S) $\begin{cases} 2ax+y+z=4 \\ 2x+y=-3 \\ 2x+ay+2z=5 \end{cases}$, cu $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi matricele $A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se determine matricea $(A-I_3)^2$.

5p **c)** Pentru $a=-1$ să se determine matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $B-A=A^2+I_3$.

5p **d)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care tripletul $(-1,-1,3)$ verifică prima ecuaţie a sistemului (S).

5p **e)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care sistemul (S) admite soluţie unică.

5p **f)** Pentru $a=-1$, să se determine soluţia sistemului (S).

SUBIECTUL III (30p) Varianta 23

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea $M=AB-BA$.

5p **b)** Pentru $a=-3$, să se determine valorile parametrului real b pentru care $\det(A)=6$.

5p **c)** Pentru $b=8$ să se determine valorile parametrului real a pentru care matricea A este inversabilă.

5p **d)** Ştiind că parametrii reali a şi b verifică relaţia $3b\neq 8a$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Pentru $a=1$ şi $b=3$, să se rezolve ecuaţia matricială $AXB=C$.

5p **f)** Să se determine perechile de numere reale (a,b) pentru care are loc egalitatea $AB=BA$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 24

Fie matricele $M=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=M+2a\cdot I_2$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea A.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a, pentru care $\det(A)=36$.

5p **c)** Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **d)** Pentru $a=\frac{1}{2}$, să se rezolve ecuaţia matricială $AX=M$.

5p **e)** Să se verifice că $A^2=4aA-4a^2I_2$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se arate că $A^3=4a^2(3M+2aI_2)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 25**

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a şi b sunt parametri reali.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Pentru $b=4$, să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A)=5$.

5p **c)** Pentru $a=2$, să se determine valorile parametrului real b pentru care matricea A este inversabilă.

5p **d)** Pentru $a=2$ şi $b=0$, să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Fie ecuaţia de gradul al doilea $x^2-4x-7=0$ ale cărei soluţii sunt x_1 şi x_2. Dacă $a=x_1$ şi $b=x_2$ să se calculeze determinantul matricei A.

5p **f)** Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+z=5 \\ z=-1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 26**

Fie sistemul de ecuaţii (S) $\begin{cases} x+2y=3 \\ \left(a^2-1\right)x+6y=9 \end{cases}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a^2-1 & 6 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det\left(A\right)$, pentru $a=2$.

5p **b)** Pentru $a=2$, să se verifice egalitatea $A^2=7A$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det\left(A\right)=0$.

5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, ştiind că perechea $\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$ este soluţie a sistemului (S).

5p **e)** Să se rezolve sistemul (S) pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,\ 2\}$.

5p **f)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluţie $\left(x_0,y_0\right)$ cu $x_0\in\mathbb{Z}$ şi $y_0\in\mathbb{Z}$

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 27**

Fie sistemul de ecuaţii (S) $\begin{cases} x+y+\left(a^2+2\right)z=1 \\ x+\left(a^2+2\right)y+z=1 \\ \left(a^2+2\right)x+y+z=1 \end{cases}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2+2 \\ 1 & a^2+2 & 1 \\ a^2+2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=0$, să se calculeze $\det\left(A\right)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul (S), pentru $a=0$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$ să fie soluţie a sistemului (S).

5p **d)** Să se arate că $\det\left(A\right)<0$, pentru oricare $a\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Ştiind că $\left(t,u,v\right)$ este soluţie a sistemului (S) să se calculeze $t+u+v$, pentru $a\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se arate că dacă $\left(t,t,t\right)$ este soluţie a sistemului (S), atunci $t\in\left(0\ ,\frac{1}{4}\right]$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 28**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A+I_3)$.

5p **b)** Să se calculeze $A+{}^tA$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.

5p **c)** Să se calculeze A^3.

5p **d)** Să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Să se verifice egalitatea $(A+I_3)(A^2-A+I_3)=2I_3$.

5p **f)** Să se determine $p\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A+pI_3$ nu este inversabilă.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 29**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}a&1\\5&a\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det\left({}^tA\right)$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.

5p **b)** Să se calculeze suma elementelor matricei $A-aI_2$.

5p **c)** Să se verifice egalitatea $(A-aI_2)^2=5I_2$.

5p **d)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, matricea A este inversabilă.

5p **e)** Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{5}\}$ să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **f)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}$, astfel încât $A^{-1}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 30**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}a&-1\\1&a\end{pmatrix}$ şi $B=A-aI_2$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze produsul elementelor matricei B.

5p **b)** Să se arate că A este matrice inversabilă, pentru oricare $a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se verifice egalitatea $B^2+I_2=O_2$.

5p **d)** Să se calculeze $B+B^{-1}$, unde B^{-1} este inversa matricei B.

5p **e)** Să se calculeze $B+B^2+B^3+B^4$.

5p **f)** Să se arate că nu există $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $\det(A)=2009$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 31**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze B^2-3B.
5p **b)** Să se verifice egalitatea $BA=3B$.
5p **c)** Să se arate că $AB\neq BA$.
5p **d)** Să se arate că toate elementele matricei $(AB)^2-(BA)^2$ sunt egale.
5p **e)** Să se determine $p\in\mathbb{R}$ astfel încât $(A+B)^2=p(A+B)$.
5p **f)** Să se calculeze $\det\left((AB)^{2009}+(BA)^{2009}\right)$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 32**

Fie sistemul de ecuații (S) $\begin{cases}x+y=1\\2ax+\left(a^2+1\right)y=2\end{cases}$ şi matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\2a&a^2+1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$, să se verifice egalitatea $A(A-3I_2)=O_2$.
5p **b)** Să se arate că $\det(A)\geq 0$, $\forall a\in\mathbb{R}$.
5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $x=-1,\ y=2$ este soluție a sistemului (S).
5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului (S) este inversabilă.
5p **e)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul (S) admite o soluție (x_0,y_0) cu $x_0,y_0\in\mathbb{N}$.
5p **f)** Să se rezolve sistemul (S) pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 33**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1&a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(aA)$.
5p **b)** Pentru $a=2$ să se verifice egalitatea $XA=(x+y)B$.
5p **c)** Să se arate că $A^2=3A$.
5p **d)** Să se determine $a,x,y\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $\left({}^tB\right)\cdot X=A^2$, unde ${}^tB$ este matricea transpusă a matricei B.
5p **e)** Să se arate că matricea I_2+pA este inversabilă pentru orice $p\neq-\frac{1}{3}$.
5p **f)** Să se determine $b\in\mathbb{R}$ astfel încât $I_2+bA=(I_2+A)^{-1}$, unde $(I_2+A)^{-1}$ este inversa matricei I_2+A.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 34

Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & 2\\ a^2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\ a\\ a^2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A(0))$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A(a)B=X$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $A(a)-A(-a)=O_3$.

5p **d)** Să se calculeze $X\cdot {}^tB-A(a)$, unde ${}^tB$ este transpusa matricei B.

5p **e)** Să se arate că $\det(A(a))$ este număr par pentru orice $a\in\mathbb{Z}$.

5p **f)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $A(a)X=B$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 35

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}a\\ a\\ a\end{pmatrix}$, cu $a,x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A+I_3)$.

5p **b)** Să se calculeze $4A+5I_3$.

5p **c)** Să se arate că $A^2=4A+5I_3$.

5p **d)** Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $\det(zA)=40$.

5p **e)** Să se arate că dacă $\begin{pmatrix}t\\ u\\ v\end{pmatrix}$ este soluţie a ecuaţiei matriciale $AX=B$, atunci $t=u=v$.

5p **f)** Să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei *A*.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 36

Fie sistemul de ecuaţii (S) $\begin{cases}-x+y+z=a\\ x-y+z=a\\ x+y-z=a\end{cases}$ şi matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A+I_3)$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care $(-2,-2,-2)$ este soluţie a sistemului (S).

5p **c)** Să se rezolve sistemul (S) pentru $a=0$.

5p **d)** Să se verifice egalitatea $A^2+A=2I_3$.

5p **e)** Să se determine A^{-1}, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **f)** Să se determine soluţia (t,u,v) a sistemului (S) care verifică relaţia $t+2u+3v=-6$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 37**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A-I_3)$.

5p **b)** Să se calculeze $A^2-5A+4I_3$.

5p **c)** Să se arate că $A^{-1}=-\frac{1}{4}A+\frac{5}{4}I_3$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **d)** Să se verifice egalitatea $\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}$.

5p **e)** Să se determine $y,z\in\mathbb{R}$, pentru care $A^2+yA+zI_3=O_3$.

5p **f)** Să se calculeze $\det\left(aA+{}^tA\right)$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A şi $a\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 38**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&-3\\1&-2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2.

5p **b)** Să se arate că $\det(A)=\det\left(A^2\right)$.

5p **c)** Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $A^2+xA+yI_2=O_2$.

5p **d)** Să se verifice egalitatea $A+A^2+A^3=O_2$.

5p **e)** Să se calculeze $A+A^2+...+A^{28}$.

5p **f)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{R}$ matricea aI_2+A este inversabilă.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 39**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}a&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $B-2C$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall\, a\in\mathbb{R}$ are loc egalitatea $\det(A+B+C)=0$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $A+B+C\neq O_2$.

5p **d)** Să se scrie sistemul de ecuații cu necunoscutele $x,\ y,\ z$ obținut din egalitatea $xA+yB+zC=O_2$.

5p **e)** Pentru $a=0$ să se determine $x,y,z\in\mathbb{R}$ care verifică egalitatea $xA+yB+zC=O_2$.

5p **f)** Să se arate că dacă $x,y,z\in\mathbb{R}$ verifică egalitatea $xA+yB+zC=O_2$, atunci $x=y=z$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 40**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $I_2+A^3=(I_2+A)(I_2-A)$.

5p **c)** Să se arate că $\det(aI_2+aA)\geq 0$ pentru oricare $a\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Să se arate că, pentru oricare $a\in\mathbb{R}$, matricea I_2+aA este inversabilă.

5p **e)** Să se arate că, pentru oricare $a\in\mathbb{R}$, există $b\in\mathbb{R}$, astfel încât $(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2$.

5p **f)** Să se determine matricea $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -x & -y\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică simultan condițiile:

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 41**

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1+\sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\{M(a,b)=aI_2+bA \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

5p **a)** Să se determine suma elementelor matricei $M(1,1)$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2+I_2=O_2$.

5p **c)** Să se calculeze $\det(M(a,b))$.

5p **d)** Să se determine matricele neinversabile din mulțimea *G*.

5p **e)** Ştiind că $M(a,b)$ este matrice inversabilă, să se arate că $M^{-1}(a,b)=M\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, unde $M^{-1}(a,b)$ este inversa matricei $M(a,b)$.

5p **f)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}$, pentru care $M^{-1}(a,1)\in G$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 42**

Fie matricele $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sqrt{2}+\sin x\\ \sqrt{2}+\sin x & -\cos x\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $0^\circ<x<180^\circ$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei $A(60^\circ)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A(60^\circ)+\frac{1}{2}I_2\right)$.

5p **c)** Să se verifice că $\det(A(x))=1$.

5p **d)** Să se calculeze $A^2(x)$.

5p **e)** Să se verifice egalitatea $A^{-1}(x)+A(x)=O_2$, $0^\circ<x<180^\circ$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **f)** Să se determine valorile lui x pentru care $A(x)=A(180^\circ-x)$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 43**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1,\ b=0,$ să se arate că $\det(A)+\det(I_3)=0$.

5p **b)** Pentru $a,b\in\mathbb{R}$, să se calculeze A^2 .

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea $aA+bI_3=O_3$.

5p **d)** Să se arate că matricea *A* este neinversabilă dacă şi numai dacă $a=b=0$.

5p **e)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$, pentru care $A^{-1}=A$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **f)** Pentru $a=\frac{1}{2}$, să se determine valorile lui $b\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=I_3$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 44**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A+2I_2)$.

5p **b)** Să se calculeze X^2 .

5p **c)** Să se verifice egalitatea $\det\left(X^2\right)=\left(\det(X)\right)^2$.

5p **d)** Să se verifice egalitatea $X^2-(a+d)X+\det(X)I_2=O_2$.

5p **e)** Să se arate că dacă $\det(X)=0$, atunci $X^2=(a+d)X$.

5p **f)** Să se rezolve, în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuaţia $X^2=A$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 45**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Pentru $a=b=c=1$, să se calculeze $A-2I_3$.

5p **b)** Pentru $a=b=c=1$, să se verifice egalitatea $A^2=3A$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$, pentru care $\det(B)=0$.

5p **d)** Să se determine matricele A pentru care $a=b=c$ şi $\det(A)=0$.

5p **e)** Să se arate că $\det(A)=(c-1)\det(B)+(a-1)(b-1)$.

5p **f)** Să se arate că există numere $a,b,c\in\mathbb{Z}$ pentru care $\det(A)=2009$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 46**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $M(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=O_2$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(M(2)\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\left(A+I_2\right)^2=M(2)$.

5p **d)** Să se determine inversa matricei $M(1)$.

5p **e)** Să se demonstreze că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b)$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $M^{2009}(x)=M(2009)$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 47**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det\left(I_2+A\right)$.

5p **b)** Să se calculeze $\left(A-I_2\right)\left(A+I_2\right)$.

5p **c)** Să se verifice egalitatea $\left(A-I_2\right)^2=O_2$.

5p **d)** Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea $A^2+xA+yI_2=O_2$.

5p **e)** Să se determine inversa matricei $2I_2-A$.

5p **f)** Să se determine matricele $Y=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația $Y^2=A$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 48**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$D=aA+bB+(1-a-b)C$, $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(AB)$.

5p **b)** Să se calculeze $AB-BA$.

5p **c)** Să se verifice egalitatea $A^2+B^2=2I_3$.

5p **d)** Să se determine suma elementelor matricei D.

5p **e)** Să se calculeze $\det\left(D^2\right)$.

5p **f)** Să se determine numerele $a,b\in\mathbb{Z}$ pentru care $\det\left(D+{}^tD\right)=\det\left({}^tDD\right)$, unde ${}^tD$ reprezintă transpusa matricei D.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 49**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a+1 & -3 \\ a-5 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se verifice că $B^2=2B+3I_2$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\det(A+B)=19$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea A să nu fie inversabilă.

5p **d)** Pentru $a=1$ să se arate că $A^2=8A$.

5p **e)** Să se arate că matricea B este inversabilă şi $B^{-1}=\frac{1}{3}\cdot(B-2I_2)$.

5p **f)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că există $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=m\cdot(A+I_2)$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 50**

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C=I_3+A$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(C)$.

5p **b)** Să se calculeze A^3.

5p **c)** Să se verifice egalitatea $(I_3+A)\left(I_3-A+A^2\right)=I_3$.

5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care $(I_3+aA)\left(I_3+A+A^2\right)=I_3$.

5p **e)** Să se determine C^{-1}, unde C^{-1} este inversa matricei C.

5p **f)** Să se determine numerele $x, y, z\in\mathbb{R}$ care verifică egalitatea $xC+yA^2+zI_3=A$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 51**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei $M=3A+I_2$.

5p **b)** Să se arate că $A^2+A=O_2$.

5p **c)** Să se calculeze $\det\left(I_2-A^2\right)$.

5p **d)** Să se determine numărul real a, astfel încât $A^3=a\cdot A$.

5p **e)** Să se calculeze $A+A^2+A^3+...+A^{2009}$.

5p **f)** Să se arate că $(I_2+A)^{2009}\neq I_2$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 52**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $C=AB-BA$.

5p **a)** Să se determine A^2+B^2.

5p **b)** Să se arate că $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se calculeze $\det(C^2)$.

5p **d)** Să se arate că are loc egalitatea $C^3+C^2=C+I_2$.

5p **e)** Să se calculeze suma elementelor matricei $C+C^2+C^3+...+C^{2009}$.

5p **f)** Să se determine matricea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $CX=B$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 53**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(2A)$.

5p **b)** Să se calculeze $AB-BA$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei A.

5p **d)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases}4x-3y=5\\ -x+y=-1\end{cases}$.

5p **e)** Să se arate că $\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det A+\det B)$.

5p **f)** Să se determine matricea X astfel încât $A\cdot X\cdot B=I_2$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 54**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix} \middle| \ a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=M(2,1)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A+I_3)$.

5p **c)** Să se arate că $M(a,b)=aI_3+bA$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Să se demonstreze că dacă $X,Y\in G$, atunci $X\cdot Y\in G$.

5p **e)** Să se arate că inversa matricei A este matricea $B=\frac{1}{2}\cdot\left(A^2-3I_3\right)$.

5p **f)** Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $M(2,1)\cdot X=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 9\end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 55**

Fie mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle|\ a,c\in(0,+\infty), b\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in G$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}+I_2$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in G$, atunci $A\cdot B\in G$.

5p **d)** Să se arate că dacă $C\in G$, atunci există $D\in G$ astfel încât $CD=DC=I_2$.

5p **e)** Să se găsească două matrice $U,V\in G$, astfel încât $UV\neq VU$.

5p **f)** Să se determine o matrice $M\in G$ cu $\det(M)=2009$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 56**

Se consideră mulţimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ x\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in G$.

5p **b)** Să se calculeze $\det A(3)$.

5p **c)** Să se arate că $A(x)A(y)=A(x+y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Să se arate că $A(x)A(-x)=I_2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Să se calculeze $A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot A(4)\cdot A(5)$.

5p **f)** Să se determine $t\in\mathbb{R}$, astfel încât $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2009)=A(t)$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 57**

Fie matricele $B=\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \middle|\ A^2=I_2\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze produsul elementelor matricei $B+C$.

5p **b)** Să se arate că $B+C\notin G$.

5p **c)** Să se calculeze $\det(B+C)$.

5p **d)** Să se determine $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $BX=C$.

5p **e)** Să se arate că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix}\in G$, pentru oricare $n\in\mathbb{Z}$.

5p **f)** Să se determine toate matricele $X=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ cu proprietatea că $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 58**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&3&6\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3&6\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A+I_3)$.

5p **b)** Să se arate că $A^3=O_3$.

5p **c)** Să se arate că $AB=BA=I_3-B$.

5p **d)** Să se calculeze $(A+I_3)B$.

5p **e)** Să se arate că $\det((I_3+A^2)(I_3-A^2))=1$.

5p **f)** Să se calculeze $A+2A^2+3A^3+...+2009A^{2009}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 59**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A+3I_2)$.

5p **b)** Să se calculeze A^2.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $(I_2+A)(I_2+aA)=I_2$.

5p **d)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases}2x+2y=0\\-2x-3y=2009\end{cases}$, $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Să se verifice că $\det(I_2+A^6)=1$.

5p **f)** Să se determine matricea $I_2+2A+3A^2+...+2009A^{2008}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 60**

În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră submulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a&1-a\\0&1\end{pmatrix} \middle| \ a\in\mathbb{R}^*\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in G$.

5p **b)** Ştiind că $A=\begin{pmatrix}a&1-a\\0&1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}b&1-b\\0&1\end{pmatrix}$ sunt două elemente din G, să se calculeze $AB-BA$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in G$, atunci $A\cdot B\in G$.

5p **d)** Ştiind că $A=\begin{pmatrix}a&1-a\\0&1\end{pmatrix}\in G$, să se determine $a\in\mathbb{R}^*$, astfel încât $\det\left(A^3\right)=8$.

5p **e)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **f)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale sistemul $\begin{cases}x+2y+3z=3\\x+2y+z=4\\2x+y+z=5\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 61**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(B)$.

5p **b)** Să se arate că $A^3=O_3$.

5p **c)** Să se arate că $(A+I_3)B=B(A+I_3)=I_3$.

5p **d)** Să se determine inversa matricei B.

5p **e)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(B-xI_3)=0$.

5p **f)** Să se calculeze $2A+3A^2+...+2009A^{2008}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 62**

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&3\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A-I_2)$.

5p **b)** Să se calculeze A^2.

5p **c)** Să se arate că $A^2=5A+6I_2$.

5p **d)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A-xI_2)=0$.

5p **e)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $A^4=aA+bI_2$.

5p **f)** Să se determine o matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $AB\neq BA$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 63**

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi submulțimea

$G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid A\cdot X=X\cdot A\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A-I_2\in G$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A-3I_2)$.

5p **c)** Să se verifice că $A^2=-I_2$.

5p **d)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A+xI_2)=10$.

5p **e)** Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{R}$ şi $B=aI_2-bA$, atunci $B\in G$.

5p **f)** Să se găsească o matrice $C\in G$ cu $\det(C)=16$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 64**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&3&3\\5&5&5\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi

mulțimea $\mathcal{M}$ a tuturor matricelor pătratice de ordin 3 care au toate elementele numere naturale impare.

5p **a)** Să se arate că $A+I_3\notin\mathcal{M}$.

5p **b)** Să se arate că $A^2\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\det(A-xI_3)=0$.

5p **d)** Să se arate că dacă $B\in\mathcal{M}$, atunci $\det(B)$ se divide prin 4.

5p **e)** Să se arate că matricea I_3+A este inversabilă.

5p **f)** Să se determine $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, astfel încât $(I_3+A)X=O_3$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 65**

Se consideră numerele reale a, b, c şi determinantul $D=\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze D pentru $a=1$, $b=2$, $c=3$.

5p **b)** Să se arate că dacă $a=b=c$, atunci $D=0$.

5p **c)** Să se arate că dacă $a+b+c=0$, atunci $D=0$.

5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât pentru $b=c=0$ să avem $D=8$.

5p **e)** Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$ şi $a+b+c\neq 0$, atunci D se divide prin $(a+b+c)$.

5p **f)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases}x+2y+3z=14\\2x+3y+z=11\\3x+y+2z=11\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 66**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei $2A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(I_2-A)$.

5p **c)** Să se arate că $A^2+A=O_2$.

5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $A^4=aA$.

5p **e)** Să se calculeze $A+2A^2+3A^3+...+2009A^{2009}$.

5p **f)** Să se arate că $(I_2-A)^{2009}\neq A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 67

Fie mulţimea $\mathcal{M}=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x\in(0,\infty)\right\}$ şi matricea $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei $A(2)$.

5p **b)** Să se arate că $I_3 \notin \mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A(x)\cdot A(y)=A(2xy)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Să se calculeze $A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A\left(\frac{2}{3}\right)\cdot A\left(\frac{3}{4}\right)$.

5p **e)** Să se arate că, dacă $A(x)\in\mathcal{M}$ şi $A(y)\in\mathcal{M}$, atunci $A(x)\cdot A(y)\in\mathcal{M}$.

5p **f)** Să se determine matricea $A(x)\in\mathcal{M}$ care verifică egalitatea $\left(A(x)\right)^2=A(x)\cdot A(4)$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 68

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze produsul elementelor matricei $A+I_2$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A^2)$.

5p **c)** Să se verifice că $A^2-3A-2I_2=O_2$.

5p **d)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\det(A-xI_2)=-4$.

5p **e)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $A^2=aA+bI_2$.

5p **f)** Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(X-I_2)=I_2$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 69

Se consideră numărul real a şi matricele $A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=2$, să se calculeze produsul elementelor matricei A.

5p **b)** Pentru $a=2$, să se calculeze $\det(A+I_3)$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\det(A+I_3)=0$.

5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea A este inversabilă.

5p **e)** Pentru $a=2$, să se determine inversa matricei A.

5p **f)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2-A=B$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 70**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $\mathcal{M}$ a tuturor matricelor de ordin 2 care au toate elementele din mulţimea $\{1,2,3,4\}$, diferite două câte două.

5p **a)** Să se calculeze $\det(2A+I_2)$.

5p **b)** Să se calculeze suma elementelor matricei A^2.

5p **c)** Să se determine inversa matricei A.

5p **d)** Să se arate că $A\in \mathcal{M}$.

5p **e)** Să se determine o matrice $B\in \mathcal{M}$ cu proprietatea că $\det(B)=10$.

5p **f)** Să se arate că orice matrice din mulţimea $\mathcal{M}$ are determinantul diferit de zero.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 71**

Fie numărul $a\in \mathbb{R}$, matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ şi sistemul (S) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+ay+z=4 \\ x+y+az=4 \end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2-3A.

5p **b)** Să se determine $a\in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

5p **c)** Să se determine $a\in \mathbb{R}$ pentru care (1, 1, 1) este soluţie a sistemului (S).

5p **d)** Să se demonstreze că pentru $a=0$ sistemul (S) nu are soluţie.

5p **e)** Pentru $a=2$, să se arate că soluţia (x_0,y_0,z_0) a sistemului (S) verifică relaţia $x_0+y_0+z_0=3$.

5p **f)** Pentru $a\in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, să se rezolve sistemul (S).

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 72**

Fie numerele reale a,b,c şi determinantul $D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze D pentru $a=1,\ b=2$ şi $c=3$.

5p **b)** Să se arate că dacă $a=b$, atunci $D=0$.

5p **c)** Pentru $b=2$ şi $c=3$, să se determine $a\in \mathbb{R}$, astfel încât $D=2$.

5p **d)** Să se demonstreze că $D=(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$.

5p **e)** Să se arate că dacă $D=0$, atunci cel puţin două dintre numerele a,b şi c sunt egale.

5p **f)** Să se arate că dacă $a,b,c\in \mathbb{Z}$, atunci D este număr întreg par.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 73

Se consideră mulțimea $G=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & a+1\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $3\cdot I_2\notin G$.

5p **b)** Să se calculeze suma elementelor matricei $A(2)$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det\left(A(a)\right)=1$.

5p **d)** Să se determine $a>0$ pentru care matricea $A(a)$ nu este inversabilă.

5p **e)** Să se determine inversa matricei $A(2)$.

5p **f)** Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $A(2)\cdot X=A(4)$.

SUBIECTUL III(30p) Varianta 74

Se consideră numărul real a, matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & a & 2\\ 2 & 2 & a\end{pmatrix}$ şi sistemul (S) $\begin{cases}x+2y+2z=5\\ 2x+ay+2z=5\\ 2x+2y+az=5\end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2+4A.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(1,\ 1,\ 1)$ este soluție a sistemului (S).

5p **d)** Să se arate că pentru $a=6$ sistemul (S) nu are soluție.

5p **e)** Pentru $a=1$, să se arate că soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului (S) verifică relația $x_0+y_0+z_0=3$.

5p **f)** Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2,6\}$, să se rezolve sistemul (S).

SUBIECTUL III(30p) Varianta 75

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ cu $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2-A.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A)+\det(3A)$.

5p **c)** Să se verifice că $X^2-(a+d)\cdot X+(ad-bc)\cdot I_2=O_2$.

5p **d)** Să se arate că dacă $\det(X)=0$, atunci $X^2=(a+d)\cdot X$.

5p **e)** Să se arate că dacă B şi X sunt două matrice astfel încât $\det(B)=0$ şi $X^2=B$, atunci $\det(X)=0$.

5p **f)** Să se rezolve ecuația $X^2=A$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 76**

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}a&2\\2&a+3\end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se verifice că $A-{}^tA=O_2$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\det(A)=0$.

5p **c)** Să se arate că $A^2=(2a+3)A-\left(a^2+3a-4\right)\cdot I_2$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Pentru $a=2$, să se determine inversa A^{-1} a matricei A.

5p **e)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=5A$.

5p **f)** Să se rezolve sistemul $(A-aI_2)\cdot X=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 77**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $B=A+mI_2$, $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ din ecuația $X+2A=I_2$.

5p **b)** Să se calculeze A^2.

5p **c)** Pentru $m=-2$ să se arate că matricea B este inversabilă.

5p **d)** Să se verifice că $AB=BA$, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(B)\geq 1$.

5p **f)** Să se determine $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3&b+2\\c+1&d-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\0&2\end{pmatrix}$, ştiind că numerele a, b, c, d sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 78**

Se consideră matricele $X(a)=\begin{pmatrix}a&0&a\\0&a&0\\a&0&a\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $X(a)=3\begin{pmatrix}3&0&3\\0&3&0\\3&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0&4\\0&4&0\\4&0&4\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că $X(-a)=-X(a)$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $X(-2)+X(-1)+X(0)+X(1)+X(2)+X(3)$.

5p **d)** Să se verifice că $X(1)\cdot X(10)=X(2)\cdot X(5)$.

5p **e)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că matricea $X(a)+I_3$ este inversabilă.

5p **f)** Să se determine matricele $Y\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $Y\cdot X(a)=X(a)\cdot Y$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 79

Se consideră matricele $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $M=\left\{A(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix} \middle| \, x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $A(1,3)+B$.

5p **b)** Să se determine $p,q\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix}3p-q & q-2\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -5 & 2\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $B^4=I_2$.

5p **d)** Să se calculeze $B+B^2+B^3+...+B^8$.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matricială $A(2,1)\cdot X=B$.

5p **f)** Să se determine matricele $A(x,y)\in M$, ştiind că $x,y\in\mathbb{Z}$ şi $\det(A(x,y))=1$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 80

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=A+bI_2$ şi $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $A+3I_2$.

5p **b)** Să se calculeze $I_2+2A+3A^2+4A^3$.

5p **c)** Să se arate că matricea B este inversabilă oricare ar fi $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât matricea aC să fie inversa matricei $A+2I_2$.

5p **e)** Să se demonstreze că matricea B verifică egalitatea $B^3=3b^2A+b^3I_2$.

5p **f)** Să se determine $b\in\mathbb{R}$, astfel încât matricea B să verifice egalitatea $AB+BA=8A$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 81**

Se consideră mulțimea de matrice $M = \left\{ X(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $2X(3,-2,-1) - X(1,2,3)$.

5p **b)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(2x+3,3,4) = X(x^2,3,4)$.

5p **c)** Să se arate că matricea $X(1,-1,1) \in M$ nu este inversabilă.

5p **d)** Să se arate că dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, atunci $A \in M$.

5p **e)** Ştiind că $X = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} z & 0 & 1 \\ 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$, să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel încât $XY = YX$ şi $\det(X) = 9$.

5p **f)** Să se calculeze $\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 2 \\ x_2 & 2 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 82**

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $A + 2B$.

5p **b)** Să se calculeze $A^2 - 2A$.

5p **c)** Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = I_2$.

5p **d)** Să se arate că matricea $AB - BA$ nu este inversabilă.

5p **e)** Dacă $m = \det(A+B)$, $n = \det(A+2B)$, $p = \det(A+4B)$ să se calculeze $\log_2 m + \log_2 n + \log_2 p$.

5p **f)** Să se arate că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(A-B)(A+B) = aA + bB$.

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi mulţimea

$M=\left\{X=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&b\\c&0&0\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $B=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&2&2\\1&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&-2&1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$, atunci $B\in M$.

5p **b)** Să se arate că matricea $C=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&-6&2\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&3&1\\3&0&0\\9&0&3\end{pmatrix}$ aparţine mulţimii M.

5p **c)** Să se calculeze $\det(A+2I_3)$.

5p **d)** Să se arate că A^2 este inversa matricei A.

5p **e)** Să se determine $Y\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ din ecuaţia matricială $(A+I_3)\cdot Y=\begin{pmatrix}-1\\3\\-6\end{pmatrix}$.

5p **f)** Fie $X,Y\in M$, $X=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&b\\c&0&0\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&y\\z&0&0\end{pmatrix}$, cu $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}^*$ şi cu proprietatea că $XY=YX$.
Să se demonstreze că dacă numerele $a,\ b,\ c$ sunt în progresie geometrică de raţie $q\in\mathbb{R}$, atunci şi numerele $x,\ y,\ z$ sunt în progresie geometrică de aceeaşi raţie q.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 84

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Ştiind că $B=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-2y \end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, să se determine $x,y\in\mathbb{R}$, astfel încât $A=B+C$.

5p **b)** Să se verifice că $A^2+2A-5I_2=O_2$.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $\det\left(A+2xI_2\right)=4$.

5p **d)** Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$, astfel încât $A^3=mA+nI_2$.

5p **e)** Să se calculeze inversa matricei A.

5p **f)** Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matricială $AXA^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 85

Se consideră matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M=\left\{X(a)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a & a+1 \end{pmatrix} \middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $X(a)=I_2$.

5p **b)** Să se calculeze $X(1)-X(2)$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ să fie soluţie a ecuaţiei $X(a)\cdot A=\begin{pmatrix} 10 \\ 18 \end{pmatrix}$.

5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(X(a))\geq 0$.

5p **e)** Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(b)\cdot X(a)$, oricare ar fi $X(a),X(b)\in M$.

5p **f)** Să se calculeze $\left(X(1)\right)^{2009}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 86**

Fie mulțimea $M=\{P\in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \mid \det(P)$ este număr întreg par$\}$ şi matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $A\in M$.

5p **b)** Să se calculeze $2A-I_3$.

5p **c)** Ştiind că $X=\begin{pmatrix}a-1 & 0 & 1\\ a & 1 & -2\\ 2a+1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ să se arate că $X\in M$ oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

5p **d)** Să se verifice că $A^3=7A$.

5p **e)** Să se determine $Y\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z})$ pentru care are loc egalitatea $(A-I_3)\cdot Y=\begin{pmatrix}-4\\ 11\\ 6\end{pmatrix}$.

5p **f)** Fie $B=\begin{pmatrix}2007 & 1 & 4\\ 2008 & 2 & 5\\ 2009 & 3 & 6\end{pmatrix}$. Să se arate că $B\in M$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 87**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $M(a)=aI_2+A$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=I_2$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Să se arate că $M(a)\cdot M(b)=M(b)\cdot M(a)$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Să se demonstreze că suma elementelor matricei $M^2(a)$ este pozitivă, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ să se determine $(M(a))^{-1}$, inversa matricei $M(a)$.

5p **f)** Să se demonstreze că pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ soluția (x_0,y_0) a sistemului $M(a)\cdot X=\begin{pmatrix}a\\ 1\end{pmatrix}$ verifică relația $x_0-y_0=1$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 88**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & 7\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $B=A+xI_2$.

5p **b)** Să se arate că $B^2=8A+5I_2$.

5p **c)** Să se arate că matricea A aparţine mulţimii $C=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\, X\cdot B=B\cdot X\right\}$.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matricială $A\cdot X=B$.

5p **e)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A)=a\cdot\begin{vmatrix}\sqrt{2}-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}-2\sqrt{3} & \sqrt{3}-2\sqrt{2}\end{vmatrix}$.

5p **f)** Să se determine valoarea minimă a expresiei $E(x)=\det(A+xB)$, pentru $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) **Varianta 89**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $2A-B$.

5p **b)** Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $xA+yB=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se verifice că $(A-I_2)^2=O_2$.

5p **d)** Să se calculeze inversa matricei A.

5p **e)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea $\det(B)=\det(xB+I_2)$.

5p **f)** Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A\cdot X+X\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 90

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $A-B+I_2$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $\det(2A)=a\det(A)$.

5p **c)** Să se arate că $B^3=4B$.

5p **d)** Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ ştiind că matricea $\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}$ este inversa matricei A.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matricială $A\cdot X=B$.

5p **f)** Să se calculeze $A+B+(A+B)^2+(A+B)^3+(A+B)^4$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 91

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulțimea M a matricelor $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că determinantul matricei X este un număr impar.

5p **a)** Să se arate că $A\in M$.

5p **b)** Să se calculeze $A-2I_3$.

5p **c)** Să se arate că $A^3=I_3$.

5p **d)** Să se arate că $A^{-1}\in M$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Fie $B=\begin{pmatrix}2a-1 & a & 2\\ -1 & a+1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Să se arate că $B\in M$ oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

5p **f)** Să se determine matricele $Y\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A\cdot Y=Y\cdot A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 92

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea de matrice $M=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid X\cdot A=A\cdot X\}$.

5p **a)** Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$, astfel încât $A=xB+yI_3$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A-3I_3)$.

5p **c)** Să se arate că $B\in M$.

5p **d)** Să se arate că matricea $a\cdot A$ aparţine mulţimii M oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Să se determine $x,y,z\in\mathbb{R}$ pentru care $(B+A)\cdot\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

5p **f)** Să se arate că dacă $X,Y\in M$, atunci $X+Y\in M$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 93

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

şi mulţimea $M=\left\{B=\begin{pmatrix}0&a&3\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Ştiind că $B\in M$, să se calculeze $\det(A)+\det(B)$.

5p **b)** Să se arate că $A-I_3\in M$.

5p **c)** Să se verifice că $B^3=O_3$, oricare ar fi $B\in M$.

5p **d)** Fie $C=\begin{pmatrix}2&-4&10\\0&2&-8\\0&0&2\end{pmatrix}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea aC să fie inversa matricei A.

5p **e)** Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=\begin{pmatrix}11\\10\\2\end{pmatrix}$.

5p **f)** Să se determine matricele $B\in M$, cu $a,b\in\{0,1,2\}$ ştiind că verifică egalitatea $B^2=O_3$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 94

Fie mulțimea $M = \left\{ A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ şi matricea $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că matricea $I_3 + A(1,2,3)$ aparține mulțimii M.

5p **b)** Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $B = \begin{pmatrix} 2x-3 & 2 & y \\ 5 & y-2 & 2 \\ 4-z & 5 & 8-y \end{pmatrix}$ să aparțină mulțimii M.

5p **c)** Să se calculeze $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

5p **d)** Să se arate că matricea $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M.

5p **e)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det\left(A(1,2,0) + xI_3\right) = 0$.

5p **f)** Să se arate că dacă $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \in M$, atunci $X^2 \in M$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 95

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $2A - B - I_2$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A) + \det(B)$.

5p **c)** Să se verifice că $AB = BA$.

5p **d)** Să se calculeze inversa matricei A.

5p **e)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\det(A + xB) = 20$.

5p **f)** Să se calculeze $A^7 + B^7$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 96

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $A-2B$.

5p **b)** Să se determine $p,q\in\mathbb{R}$ ştiind că $pA+qB=-8I_2$.

5p **c)** Să se arate că $A^2+2AB+B^2=16I_2$.

5p **d)** Să se calculeze $\det\left(\sqrt{2}A-\sqrt{2}I_2\right)$.

5p **e)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $C=\begin{pmatrix} -2+x & 2+m \\ 2 & -2+x \end{pmatrix}$ să fie inversabilă pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **f)** Să se calculeze $A^{2009}\cdot B^{2009}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 97

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $M=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})\mid \det(X)$ este număr par$\}$.

5p **a)** Să se arate că $A+I_3\in M$.

5p **b)** Să se verifice că $(A+I_3)^2=3A+I_3$.

5p **c)** Să se calculeze $A+A^2+A^3+...+A^{12}$.

5p **d)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $\det(A+xI_3)=0$.

5p **e)** Să se arate că $AX\in M$, oricare ar fi $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

5p **f)** Fie $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. Să se arate că $B\in M$ oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 98

Fie mulțimea $M=\left\{A=\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} \mid a,b,x\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=2,\ b=5,\ x=-2$ să se calculeze $A+3I_2$.

5p **b)** Să se determine $a,b,x\in\mathbb{R}$ ştiind că $\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2-b \\ b & a+3 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Ştiind că $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\in M$ şi că $\det(A)=0$, să se determine $x\in\mathbb{R}$.

5p **d)** Să se determine $a,b\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, astfel încât $\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **e)** Să se arate că matricea $A\in M$, $A=\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix}$ verifică relația $A^2-2xA+\left(x^2-ab\right)I_2=O_2$.

5p **f)** Să se determine matricea $X\in M$ ştiind că $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 99

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $2A+X=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $A^4=I_2$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că perechea $(2,1)$ este soluție a sistemului $\begin{cases} -2ax+5by=6 \\ -ax+2by=2 \end{cases}$.

5p **d)** Să se calculeze $\left(2A+A^{-1}\right)\cdot\left(A-2A^{-1}\right)$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **e)** Să se calculeze $\det(A)+\det(A^2)+\det(A^3)+\det(A^4)$.

5p **f)** Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot X\cdot A^{-1}=A+I_2$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 100

Se consideră matricele $X(a)=\begin{pmatrix}2a & a+1 & a+2\\ 0 & a-1 & a-2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Pentru o matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează cu $S_1(A)$ suma elementelor din prima coloană, cu $S_2(A)$ suma elementelor din a doua coloană, cu $S_3(A)$ suma elementelor din a treia coloană şi cu M mulţimea de matrice $M=\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid S_1(A)=S_2(A)=S_3(A)\}$.

5p **a)** Să se arate că $I_3\in M$.

5p **b)** Să se calculeze $X(1)-2I_3$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $B=\begin{pmatrix}2a & -7 & 2\\ 2-2b & 2a-1 & 2\\ 3 & 3 & -5\end{pmatrix}$ să aparţină mulţimii M.

5p **d)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $\det(X(a)+I_3)=6$.

5p **e)** Să se arate că oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, matricea $C=X(a)\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ aparţine mulţimii M.

5p **f)** Să se demonstreze că pentru orice matrice $A,B\in M$, matricea $A+B$ aparţine mulţimii M.