

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011

Proba E. c)

Probă scrisă la MATEMATICĂ

MODEL

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați modulul numărului complex $z = 1 - i\sqrt{3}$.
- 5p 2. Determinați mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.
- 5p 3. Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 6$ și $b_5 = 24$, determinați termenul b_7 .
- 5p 4. Determinați $x > 0$, știind că $\log_a x = 2\log_a 3 - 3\log_a 2$, unde $a > 0$, $a \neq 1$.
- 5p 5. Scrieți ecuația dreptei care conține punctul $A(3, 2)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: x + 2y + 5 = 0$.
- 5p 6. Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p a) Calculați $(A(2) - A(0))^{2010}$.
- 5p b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă și calculați inversa matricei $A(x)$.
2. Pe mulțimea $G = (0, 1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.
- 5p a) Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „*“.
- 5p b) Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea „*“.
- 5p c) Demonstrați că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot) .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + 1$.
- 5p a) Calculați $f'(5)$.
- 5p b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(n+1) - 1}{f(n) - 1} \right)^n$.
- 5p c) Arătați că ecuația $f'(x) = 0$ are exact trei soluții reale distincte.
2. Fie șirul $(I_n)_{n \geq 0}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(x^2 + x + 1)^n - x}{x^2 + 1} dx$.
- 5p a) Calculați I_0 .
- 5p b) Verificați dacă $I_2 - I_0 \in \mathbb{Q}$.
- 5p c) Arătați că $I_{4n+1} \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.