1) Determinați numărul natural x din egalitatea $1 + 8 + 15 + ... + x = 1794$.

2) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3 + a_{17} = 158$, calculați $a_9 + a_{11}$.

3) Determinați primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 25, 32, ...$

4) Determinați primul termen al unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_6 + a_{11} = 123$ și rația $r = 7$.

5) Determinați primul termen și rația unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_{12} = 48$ și $a_{18} = 72$.

6) Determinați primul termen și rația unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 + a_{11} = 26$ și $a_7 + a_9 = 32$.

7) Determinați primul termen și rația unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $S_6 = 141$ și $S_8 = 244$

8) Verificați dacă 248 este termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_{12} = 93$ și $a_{23} = 181$.

9) Calculați suma primilor 30 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_7 = 51$ și $a_{29} = 227$.

10) Determinați primul termen și rația unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $S_{15} - S_5 = 660$ și $a_{10} - a_8 = 12$.

1) 155.

2) 158.

3) 11.

4) 9.

5) 4, 4.

6) 2, 2.

7) 6, 7.

8) nu.

9) 3570.

10) 9, 6.

1)
Termenii sumei sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,
cu $a_1 = 1$ și $a_2 = 8$,
deci rația $r = a_2 - a_1 = 8 - 1 = 7$.
x este termenul al n-lea, iar 1794 este suma primilor n termeni.
Folosind formula sumei primilor n termeni:

$$S = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

se determină n (al câtelea termen este x).
Înlocuind valorile cunoscute se obține:

$$\frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 7}{2} \cdot n = 1794$$

și efectuând calculele se ajunge la ecuația de gradul al doilea:
$7n^2 - 5n - 3588 = 0$
care se rezolvă:
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-3588) = 100489$
$\sqrt{\Delta} = 317$

$$n_{1,2} = \frac{-(-5) \pm 317}{2 \cdot 7}$$

$n_1 = \frac{-312}{14} \notin \mathbb{N}$, $n_2 = \frac{322}{14} = 23 \in \mathbb{N}$.
Deci x este al 23-lea termen al progresiei aritmetice cu $a_1 = 1$ și $r = 7$.
Folosind formula termenului general, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, se obține:
$x = a_{23} = a_1 + (23-1) \cdot r$
$x = a_1 + 22 \cdot r$
$x = 1 + 22 \cdot 7$
$x = 155$.

2)
Folosind formula termenului general al unei progresii aritmetice, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, se obține:
$a_3 + a_{17} = 158$
$a_1 + (3-1) \cdot r + a_1 + (17-1) \cdot r = 158$
$a_1 + 2 \cdot r + a_1 + 16 \cdot r = 158$
$2 \cdot a_1 + 18 \cdot r = 158$.
Se calculează:
$a_9 + a_{11} = a_1 + (9-1) \cdot r + a_1 + (11-1) \cdot r$
$a_9 + a_{11} = a_1 + 8 \cdot r + a_1 + 10 \cdot r$
$a_9 + a_{11} = 2 \cdot a_1 + 18 \cdot r$
$a_9 + a_{11} = 158$

3)
Se observă că $a_3 = 25$ și $a_4 = 32$, deci:
$r = a_4 - a_3$
$r = 32 - 25$
$r = 7$
Acum:
$a_2 = a_3 - r$
$a_2 = 25 - 7$
$a_2 = 18$,
iar
$a_1 = a_2 - r$
$a_1 = 18 - 7$

$a_1 = 11$.
4)
Folosind formula termenului general al unei progresii aritmetice, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, se obține:
$a_6 + a_{11} = 123$
$a_1 + (6-1) \cdot r + a_1 + (11-1) \cdot r = 123$
$a_1 + 5 \cdot 7 + a_1 + 10 \cdot 7 = 123$
$a_1 + 35 + a_1 + 70 = 123$
$2 \cdot a_1 + 105 = 123$
$2 \cdot a_1 = 123 - 105$
$2 \cdot a_1 = 18$
$a_1 = 9$.
5)
Folosind formula termenului general al unei progresii aritmetice, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, se obține:
$\begin{cases} a_{12} = 48 \\ a_{18} = 72 \end{cases}$
$\begin{cases} a_1 + (12-1) \cdot r = 48 \\ a_1 + (18-1) \cdot r = 72 \end{cases}$
$\begin{cases} a_1 + 11r = 48 \\ a_1 + 17r = 72 \end{cases}$
Scăzând prima ecuație din a doua ecuație, se obține:
$6r = 24$
$r = 4$
Substituind $r = 4$ în prima ecuație, se obține:
$a_1 + 11 \cdot 4 = 48$
$a_1 + 44 = 48$
$a_1 = 48 - 44$
$a_1 = 4$.
6)
Folosind formula termenului general al unei progresii aritmetice, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, se obține:
$\begin{cases} a_2 + a_{11} = 26 \\ a_7 + a_9 = 32 \end{cases}$
$\begin{cases} a_1 + (2-1) \cdot r + a_1 + (11-1) \cdot r = 26 \\ a_1 + (7-1) \cdot r + a_1 + (9-1) \cdot r = 32 \end{cases}$
$\begin{cases} a_1 + 1r + a_1 + 10r = 26 \\ a_1 + 6r + a_1 + 8r = 32 \end{cases}$
$\begin{cases} 2a_1 + 11r = 26 \\ 2a_1 + 14r = 32 \end{cases}$
Scăzând a doua ecuație din prima ecuație, se obține:
$-3r = -6$
$r = 2$
Substituind $r = 2$ în prima ecuație, se obține:
$2a_1 + 11 \cdot 2 = 26$
$2a_1 + 22 = 26$
$2a_1 = 26 - 22$
$2a_1 = 4$
$a_1 = 2$.
7)

Folosind formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, $S_n = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$, se obține:

$S_6 = \frac{2 \cdot a_1 + (6-1) \cdot r}{2} \cdot 6$

$S_8 = \frac{2 \cdot a_1 + (8-1) \cdot r}{2} \cdot 8$

$\begin{cases} S_6 = 141 \\ S_8 = 244 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2 \cdot a_1 + (6-1) \cdot r}{2} \cdot 6 = 141 \\ \frac{2 \cdot a_1 + (8-1) \cdot r}{2} \cdot 8 = 244 \end{cases}$

$\begin{cases} (2a_1 + 5r) \cdot 6 = 282 \\ (2a_1 + 7r) \cdot 8 = 488 \end{cases}$

$\begin{cases} 12a_1 + 30r = 282 \\ 16a_1 + 56r = 488 \end{cases}$

Prima ecuație se împarte cu 6.

A doua ecuație se împarte cu 8.

$\begin{cases} 2a_1 + 5r = 47 \\ 2a_1 + 7r = 61 \end{cases}$

Scăzând prima ecuație din a doua ecuație, se obține:

$2r = 14$

$r = 7.$

Substituind $r = 7$ în prima ecuație, se obține:

$2a_1 + 5 \cdot 7 = 47$

$2a_1 + 35 = 47$

$2a_1 = 47 - 35$

$2a_1 = 12$

$a_1 = 6.$

8)

Se determină mai întâi primul termen și rația progresii aritmetice.

Folosind formula termenului general al unei progresii aritmetice, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, se obține:

$\begin{cases} a_{12} = 93 \\ a_{23} = 181 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + (12-1) \cdot r = 93 \\ a_1 + (23-1) \cdot r = 181 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + 11r = 93 \\ a_1 + 22r = 181 \end{cases}$

Scăzând prima ecuație din a doua ecuație, se obține:

$11r = 88$

$r = 8$

Substituind $r = 8$ în prima ecuație, se obține:

$a_1 + 11 \cdot 8 = 93$

$a_1 + 88 = 93$

$a_1 = 93 - 88$

$a_1 = 5$.

Folosind din nou formula termenului general al unei progresii aritmetice, se verifică dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n = 248$.

$a_1 + (n-1) \cdot r = 248$

$5 + (n-1) \cdot 8 = 248$

$(n-1) \cdot 8 = 243$

$n - 1 = \frac{243}{8} \notin \mathbb{N}$

Deci 248 nu este termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$.

9)

Se determină mai întâi primul termen și rația progresii aritmetice.

Folosind formula termenului general al unei progresii aritmetice, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, se obține:

$\begin{cases} a_7 = 51 \\ a_{29} = 227 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + (7-1)\cdot r = 51 \\ a_1 + (29-1)\cdot r = 227 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + 6r = 51 \\ a_1 + 28r = 227 \end{cases}$

Scăzând prima ecuație din a doua ecuație, se obține:

$22r = 176$

$r = 8$

Substituind $r = 8$ în prima ecuație, se obține:

$a_1 + 6\cdot 8 = 51$

$a_1 + 48 = 51$

$a_1 = 51 - 48$

$a_1 = 3$.

Folosind formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, $S_n = \frac{2\cdot a_1+(n-1)\cdot r}{2}\cdot n$, se obține:

$S_{30} = \frac{2\cdot a_1+(30-1)\cdot r}{2}\cdot 30$

$S_{30} = \frac{2\cdot 3+29\cdot 8}{2}\cdot 30$

$S_{30} = \frac{238}{2}\cdot 30$

$S_{30} = 3570.$

10)

Folosind formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, $S_n = \frac{2\cdot a_1+(n-1)\cdot r}{2}\cdot n$, se obține:

$S_5 = \frac{2\cdot a_1+(5-1)\cdot r}{2}\cdot 5$ și $S_{15} = \frac{2\cdot a_1+(15-1)\cdot r}{2}\cdot 15.$

Cum $S_{15} - S_5 = 660$, are loc:

$\frac{2\cdot a_1+14\cdot r}{2}\cdot 15 - \frac{2\cdot a_1+4\cdot r}{2}\cdot 5 = 660$

$(2a_1 + 14r)\cdot 15 - (2a_1 + 4r)\cdot 5 = 1320$

$30a_1 + 210r - 10a_1 - 20r = 1320$

$20a_1 + 190r = 1320.$

Se împarte egalitatea cu 10 și se obține:

(*) $2a_1 + 19r = 132.$

Folosind formula termenului general al unei progresii aritmetice, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, se obține:

$a_{10} - a_8 = 12$

$(a_1 + 9r) - (a_1 + 7r) = 12$

$a_1 + 9r - a_1 - 7r = 12$

$2r = 12$

$r = 6.$

Se substituie $r = 6$ în egalitatea (*):

$2a_1 + 19\cdot 6 = 132$

$2a_1 + 114 = 132$

$2a_1 = 18$

$a_1 = 9.$