1) Determinați primul termen și rația progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 24, b_3, 96, \ldots$.

1) 12, 2.

1)
Se observă că $b_2 = 24$ și $b_4 = 96$.
Folosind formula termenului general al unei progresii geometrice, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, se obține:
$\begin{cases} b_2 = b_1 \cdot q \\ b_4 = b_1 \cdot q^3 \end{cases}$
$\begin{cases} b_1 \cdot q = 24 \\ b_1 \cdot q^3 = 96 \end{cases}$
Se împarte a doua ecuație la prima ecuație:
$\dfrac{b_1 \cdot q^3}{b_1 \cdot q} = \dfrac{96}{24}$
$q^2 = 4$
$q = \pm 2$,
cum progresia este cu termeni pozitivi:
$q = 2$
$b_1 = \dfrac{b_2}{q}$
$b_1 = \dfrac{24}{2}$
$b_1 = 12$.

2) Determinați primul termen și rația progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, b_2, 80, 320, \ldots$.

2) 5, 4.

2)
Se observă că $b_3 = 80$ și $b_4 = 320$.
Folosind definiția progresiei geometrice, $b_n = b_{n-1} \cdot q$, se obține:
$q = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$
$q = \dfrac{b_4}{b_3}$
$q = \dfrac{320}{80}$
$q = 4$.
Folosind din nou definiția progresiei geometrice, $b_n = b_{n-1} \cdot q$, se obține:
$b_{n-1} = \dfrac{b_n}{q}$
$b_2 = \dfrac{b_3}{q}$ și $b_1 = \dfrac{b_2}{q}$
$b_2 = \dfrac{80}{4}$
$b_2 = 20$
$b_1 = \dfrac{20}{4}$
$b_1 = 5$.

3) Fie progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu termeni pozitivi. Dacă $b_1 + b_3 = 338$ și $b_2 + b_4 = 1690$, determinați b_1 și rația q

3) 13, 5.

3)
Folosind formula termenului general al unei progresii geometrice, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, se obține:

$\begin{cases} b_1 + b_3 = 338 \\ b_2 + b_4 = 1690 \end{cases}$
$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^2 = 338 \\ b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^3 = 1690 \end{cases}$
$\begin{cases} b_1(1 + q^2) = 338 \\ b_1 q(1 + q^2) = 1690 \end{cases}$
Se împarte a doua ecuație la prima ecuație:
$\frac{b_1 q(1 + q^2)}{b_1(1 + q^2)} = \frac{1690}{338}$
$q = 5$.
Se substituie $q = 5$ în prima ecuație:
$b_1(1 + 5^2) = 338$
$26b_1 = 338$
$b_1 = 13$.

4) Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi. Dacă $b_1+b_4 = 2752$ și $b_1-b_2+b_3 = 344$, determinați b_1 și rația q.

4) 8, 7.

4)
Folosind formula termenului general al unei progresii geometrice, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, se obține:
$\begin{cases} b_1 + b_4 = 2752 \\ b_1 - b_2 + b_3 = 344 \end{cases}$
$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^3 = 2752 \\ b_1 - b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 344 \end{cases}$
$\begin{cases} b_1(1 + q^3) = 2752 \\ b_1(1 - q + q^2) = 344 \end{cases}$
$\begin{cases} b_1(1 + q)(1 - q + q^2) = 2752 \\ b_1(1 - q + q^2) = 344 \end{cases}$
Se împarte prima ecuație la a doua ecuație:
$\frac{b_1(1 + q)(1 - q + q^2)}{b_1(1 - q + q^2)} = \frac{2752}{344}$
$q + 1 = 8$
$q = 7$.
Se substituie $q = 7$ în prima ecuație:
$b_1(1 + 7^3) = 2752$
$344b_1 = 2752$
$b_1 = 8$.

5) Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi. Dacă $b_4 - b_1 = 91$ și $b_1 + b_2 + b_3 = 91$, determinați b_1 și rația q.

5) 13, 2.

5)
Folosind formula termenului general al unei progresii geometrice, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, se obține:
$\begin{cases} b_4 - b_1 = 91 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 91 \end{cases}$
$\begin{cases} b_1 \cdot q^3 - b_1 = 91 \\ b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 91 \end{cases}$

$\begin{cases} b_1(q^3-1)=91 \\ b_1(1+q+q^2)=91 \end{cases}$

$\begin{cases} b_1(q-1)(q^2+q+1)=91 \\ b_1(1+q+q^2)=91 \end{cases}$

Se împarte prima ecuație la a doua ecuație:

$\dfrac{b_1(q-1)(q^2+q+1)}{b_1(1+q+q^2)}=\dfrac{91}{91}$

$q-1=1$

$q=2.$

Se substituie $q=2$ în prima ecuație:

$b_1(2^3-1)=91$

$7b_1=91$

$b_1=13.$

6) Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi. Dacă $b_2+b_3=180$ și $b_1+b_4=585$, determinați b_1 și rația q.

6) 9, 4 și 576, $\dfrac{1}{4}$.

6)

Folosind formula termenului general al unei progresii geometrice, $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$, se obține:

$\begin{cases} b_2+b_3=180 \\ b_1+b_4=585 \end{cases}$

$\begin{cases} b_1\cdot q+b_1\cdot q^2=180 \\ b_1+b_1\cdot q^3=585 \end{cases}$

$\begin{cases} b_1q(1+q)=180 \\ b_1(1+q^3)=585 \end{cases}$

$\begin{cases} b_1q(1+q)=180 \\ b_1(1+q)(1-q+q^2)=585 \end{cases}$

Se împarte a doua ecuație la prima ecuație:

$\dfrac{b_1(1+q)(1-q+q^2)}{b_1q(1+q)}=\dfrac{585}{180}$

$\dfrac{1-q+q^2}{q}=\dfrac{13}{4}$

$4\cdot(1-q+q^2)=13\cdot q$

$4-4q+4q^2=13q$

$4q^2-4q-13q+4=0$

$4q^2-17q+4=0.$

Se obțin soluțiile: $q=4$ și $q=\dfrac{1}{4}$.

Substituind $q=4$ în prima ecuație $b_1q(1+q)=180$, se obține $b_1=9$.

Substituind $q=\dfrac{1}{4}$ în prima ecuație $b_1q(1+q)=180$, se obține $b_1=576$.

7) Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi. Dacă $b_5-b_1=16380$ și $b_4-b_2=2016$, determinați b_1 și rația q.

7) 4, 8 și -16384, $\dfrac{1}{8}$.

7)

Folosind formula termenului general al unei progresii geometrice, $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$, se obține:

$\begin{cases} b_5 - b_1 = 16380 \\ b_4 - b_2 = 2016 \end{cases}$

$\begin{cases} b_1 \cdot q^4 - b_1 = 16380 \\ b_1 \cdot q^3 - b_1 \cdot q = 2016 \end{cases}$

$\begin{cases} b_1(q^4 - 1) = 16380 \\ b_1 q(q^2 - 1) = 2016 \end{cases}$

$\begin{cases} b_1(q^2 - 1)(q^2 + 1) = 16380 \\ b_1 q(q^2 - 1) = 2016 \end{cases}$

Se împarte prima ecuație la a doua ecuație:

$\frac{b_1(q^2-1)(q^2+1)}{b_1 q(q^2-1)} = \frac{16380}{2016}$

$\frac{q^2+1}{q} = \frac{65}{8}$

$8 \cdot (q^2 + 1) = 65 \cdot q$

$8q^2 + 8 = 65q$

$8q^2 - 65q + 8 = 0$

Se obțin soluțiile: $q = 8$ și $q = \frac{1}{8}$.

Substituind $q = 8$ în prima ecuație $b_1(q^4 - 1) = 16380$, se obține $b_1 = 4$.

Substituind $q = \frac{1}{8}$ în prima ecuație $b_1(q^4 - 1) = 16380$, se obține $b_1 = -16384$.

8) Calculați suma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9$.

8)
$2^9 - 1$.

8)
Se observă că termenii sumei sunt primii 10 termeni ai unei progresii geometrice, $(b_n)_{n\geq 1}$, având primul termen $b_1 = 1$ și rația $q = 2$.

Folosind formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice, $S_n = b_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$, se obține:

$S_9 = 1\frac{2^9 - 1}{2 - 1}$

$S_9 = \frac{2^9 - 1}{1}$

$S_9 = 2^9 - 1$.

9) Rezolvați ecuația $1 + 8 + 8^2 + ... + 8^n = 4681$.

9) 4.

9)
Se observă că termenii sumei sunt primii $n + 1$ termeni ai unei progresii geometrice, $(b_n)_{n\geq 1}$, având primul termen $b_1 = 1$ și rația $q = 8$.

Folosind formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice, $S_n = b_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$, se obține:

$4681 = 1\frac{8^{n+1} - 1}{8 - 1}$

$4681 = \frac{8^{n+1} - 1}{7}$

$8^{n+1} - 1 = 4681 \cdot 7$

$8^{n+1} - 1 = 32767$

$8^{n+1} = 32768$
$8^{n+1} = 8^5$
$n + 1 = 5$
$n = 4.$