CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 1 martie 2008

Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A XI-A

I. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2|\alpha|(x+1)+\alpha^2+1}, & x\le 0\\ e\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$. Să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=0$.

II. În reperul otogonal (xOy) considerăm punctele $A_n(n,\ n^2),\ n\in\mathbb{N}$.

a) Arătați că oricare trei dintre aceste puncte sunt necoliniare.

b) Arătați că oricare triunghi determinat de trei astfel de puncte are aria egală cu un număr natural.

III. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}-x\right)$.

b) Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=2$.

IV. Fie $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2\in\mathbb{Z}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1 & a_1 & 0\\ 0 & a_2 & b_1\\ b_2 & 0 & a_3\end{pmatrix}$. Două persoane X şi Y joacă următorul joc: X dă o valore lui a_1, apoi Y dă o valoare lui b_1, iarăşi X dă o valoare lui a_2, apoi Y dă o valore lui b_2 şi, în sfârşit, X dă o valore lui a_3. Câştigă X dacă şi numai dacă $|\det A|=1$. Precizați tripletele (a_1,a_2,a_3) care asigură victoria lui X indiferent de alegerile lui Y.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7