CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 1 martie 2008
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE - CLASA A X A

I.
a) Justifică monotonia funcției f 3p

b) Arată că orice valori de forma $\left(k^3-6\right)^2$, k>2 corespund cerinței 2p

c) Identifică soluția x = 4 .... 1p
Justifică unicitatea 1p

2.
a) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2x}$ 1p

Notăm $\left(\sqrt{2}-1\right)^x=t\Rightarrow t^2-6t+1\le 0\Rightarrow t\in\left[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right]$ 2p

Deci $\left(\sqrt{2}-1\right)^2\le\left(\sqrt{2}-1\right)^x\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-2}\Rightarrow -2\le x\le 2\Rightarrow x\in\left[-2,2\right]$ 1p

b) $\log_{x_1}x_2+\log_{x_2}x_1\ge 2$ şi încă 2 relații similare 1p

Finalizare 2p

3.
a) $\left(1+x\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}$. Coeficientul lui x^2 va fi $C_3^2+C_4^2+...+C_{n+2}^2=$ 1p

$=\frac{1}{2}\left[1\cdot 2+2\cdot 3+...+\left(n+1\right)\left(n+2\right)-2\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}{3}-2\right]=\frac{n\left(n^2+6n+11\right)}{6}$ 2p

sau metoda a II a: Coeficientul lui x^2 va fi coeficientul lui x^3 din $\left(1+x\right)^{n+3}-\left(1+x\right)^3$ adică

$C_{n+3}^3-C_3^3=\frac{n\left(n^2+6n+11\right)}{6}$ 3p

b)

$\left(1+x\right)^{2n}\left(1-x\right)^{2n}=\left(1-x^2\right)^{2n}\Rightarrow\sum_{i=0}^{2n}C_{2n}^i x^i\cdot\sum_{i=0}^{2n}\left(-1\right)^j C_{2n}^j x^j=\sum_{k=0}^{2n}\left(-1\right)^k C_{2n}^k x^{2k}$ 1p

Prin identificarea coeficienților lui $x^{2n}\Rightarrow\sum_{i+j=2n}\left(-1\right)^j C_{2n}^i C_{2n}^j=\left(-1\right)^n C_{2n}^n$ 1p

Pentru $i=0, j=2n$ apoi $i=1, j=2n-1\Rightarrow C_{2n}^0 C_{2n}^{2n}-C_{2n}^1 C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^2 C_{2n}^{2n-2}+...=\left(-1\right)^n C_{2n}^n$

dar $C_n^k=C_n^{n-k}\Rightarrow C_{2n}^{2n-s}=C_{2n}^s\Rightarrow$ concluzia 2p

4.
a) $C_n=C_0\left(1+d\right)^n$, unde C_0 este capitalul inițial, d este dobânda anuală 1p

$C_0=10000, n=5, d=4\Rightarrow C_1=10000\cdot 1,04=10400,...,C_5=10000\cdot\left(1,04\right)^5=12166$ 2p

b) Formula de amortizare a unei datorii D cu dobânda d este : $D\left(1+d\right)^n=S\frac{\left(1+d\right)^n-1}{d}$ 1p

Fie S suma de plătit periodic timp de n ani

$\Rightarrow S=\frac{Dd}{1-\left(1+d\right)^{-n}}, D=120000, n=25, d=5,5\%\Rightarrow S\approx 8945$ u.m. 3p