# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009

**Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului**

**BAREM CLASA a X-a**

**I.** a) $x\cdot y=k\in\mathbb{N}^*$ ……………………………………………………………..……………..2p

b) $\frac{x}{y}=\frac{x^2}{xy}=\frac{x^2}{k}$ ........................................................................................................3p

$k\cdot\frac{x}{y}-\sqrt{m^2-k^2}=x^2-\sqrt{m^2-k^2}=m\in\mathbb{N}^*$ ...............................................................................2p

**TOTAL 7 puncte**

OBS.Orice variantă corectă de rezolvare se va puncta corespunzător.

De exemplu, se poate folosi în rezolvare formula radicalilor compuşi: $x=\sqrt{\frac{m+k}{2}}+\sqrt{\frac{m-k}{2}}$, iar $y=\sqrt{\frac{m+k}{2}}-\sqrt{\frac{m-k}{2}}$.

**II.** a) $5^\alpha=4,\ 5^\beta=6\Rightarrow 5^{\alpha+\beta}=24\Rightarrow\alpha+\beta<2$ sau $\alpha+\beta=\log_5 24<2$ .......................................2p

b) $2>\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}\Rightarrow\alpha\beta<1$ ……………………………………………...…………..3p

c) $f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)\left(1-\frac{1}{\alpha\beta}\right)$ ……………………………………...……..…………1p

$f(\alpha)-f(\beta)>0\Rightarrow f(\alpha)>f(\beta)$ ……………………………………………..……..…………1p

**TOTAL 7 puncte**

**III.** a) $z\in M\Rightarrow z=x+y\sqrt{2},\ x,y\in\mathbb{Q},\ y\neq 0$ ……….…………….………………..……..…….....1p

$u=\frac{z^3-\left(\overline{z}\right)^3}{\left(z-\overline{z}\right)^3}=\frac{\left(x+y\sqrt{2}\right)^3-\left(x-y\sqrt{2}\right)^3}{\left(2y\sqrt{2}\right)^3}=\frac{3x^2+2y^2}{8y^2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow A\subset\mathbb{Q}$ …..……………………….…....3p

b) $u=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow\min(A)=\frac{1}{4}$, pentru $x=0$ ………………………………………………...1p

Aşadar cel mai mic element al mulțimii A este $\frac{1}{4}$ şi acesta se obține pentru numere din M, de forma $z=y\sqrt{2}$ ………. …………………………...……………………………………2p

**TOTAL 7 puncte**

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
***"ADOLF HAIMOVICI"***
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009**

**Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului**

**IV.** Dacă $n_1,\ n_2,...,n_{1005} \in \{1,2,3...,2009\}$ sunt numerele de pe tricourile elevilor, atunci şi $2010-n_1,\ 2010-n_2,....,2010-n_{1005} \in \{1,2,3,...,2009\} \subset (0,2010)$ ……………………………1p

Cum în acest interval există numai 2009 numere naturale distincte, rezultă că cel puțin două dintre cele 2010 numere, unul din mulțimea $\{n_1,\ n_2,\dots,n_{1005}\}$ şi celălalt din mulțimea $\{2010-n_1,\ 2010-n_2,....,2010-n_{1005}\}$ sunt egale............................................................................3p

Fie acestea $n_i$ respectiv respectiv $2010-n_j,\ i,j\in\overline{1,1005}$ ..............................................................1p

Dacă $i=j \Rightarrow n_i=1005$, iar dacă $i\neq j \Rightarrow n_i+n_j=2010$ ................................................................2p

SAU: Se observă că:

$\{1,2,3,...,2009\}=\{1,2009\}\cup\{2,2008\}\cup\{3,2007\}\cup...\cup\{1004,1006\}\cup\{1005\}$ şi justifică răspunsul.

**TOTAL 7 puncte**