CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009

Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului

CLASA a X-a

I. Se dau numerele reale: $x=\sqrt{m+\sqrt{m^2-k^2}}$ şi $y=\sqrt{m-\sqrt{m^2-k^2}}$ unde $m,\ k\in\mathbb{N}^*$ şi $m>k$.
Demonstrați că:
a) $x\cdot y\in\mathbb{N}^*$;
b) $k\cdot\frac{x}{y}-\sqrt{m^2-k^2}\in\mathbb{N}^*$.

II. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=x+\frac{1}{x}$ şi $\alpha=\log_5 4,\ \beta=\log_5 6$.
a) Demonstrați că $\alpha+\beta<2$.
b) Demonstrați că $\alpha\cdot\beta<1$.
c) Comparați $f(\alpha)$ cu $f(\beta)$.

III. Se consideră mulțimile: $M=\left\{z=x+y\sqrt{2}\,/\,x,y\in\mathbb{Q},\,y\neq 0\right\}$ şi $A=\left\{u=\frac{z^3-\left(\overline{z}\right)^3}{\left(z-\overline{z}\right)^3}\,/\,z\in M\right\}$.
a) Demonstați că $A\subset\mathbb{Q}$.
b) Determinați cel mai mic element al mulțimii A şi indicați forma numerelor din mulțimea M pentru care se obține această valoare.
(Notă: dacă $z=x+y\sqrt{2}$, atunci $\overline{z}=x-y\sqrt{2}$)

IV. Sub deviza „SPORTUL înseamnă SĂNĂTATE”, ministerul turismului organizează faza națională a olimpiadei elevilor. La atletism participă 1005 elevi, având pe tricouri numerele $n_1,\ n_2,...,n_{1005}\in\{1,\ 2,\ 3,...,2009\}$. Demonstrați că printre elevi există unul cu numărul de pe tricou 1005 sau doi pentru care suma numerelor de pe tricourile lor este 2010.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7